Math. P. 741 x

c

Lehrbuch

der

Geometrie.

Zum

öffentlichen Gebrauche

für Individuen, die sich dem Forstfache, der Meß- und Baukunst widmen, so wie zum Selbstunterrichte für jeden Liebhaber dieser Wissenschaft.

Enthaltend die theoretische Geometrie, die geradlinige Trigonometrie und Polygonometrie, nebst den Anfangsgründen der Differenzial- und Integral-Rechnung.

Bayerische Staatsbibliothek München

Bearbeitet

von

Georg v. Winkler,

Professor der Mathematik an der k. k. Forst-Lehranstalt zu Mariabrunn, der k. k. Landwirthschafts-Gesellschaft zu Wien wirklichem, der k. k. patriot.-ökonomischen Gesellschaft in Böhmen, und der k. k. Landwirthschafts-Gesellschaft in Steyermark correspondirendem Mitgliede.

Bayer. Staatsministerium f. Ernährung, Landwirtschaft u. Forsten
Ministerialforstabteilung
Bücherei
Ae 2
36
Kgl. Bay. Ministerialforstabteilung

Dritte, verbesserte und vermehrte Auflage,
mit 7 Kupfertafeln.

Wien, 1839.
Im Verlage bey J. G. Heubner.

Ga 164/441

Bayerische Staatsbibliothek München

Gedruckt bey A. Strauß's sel. Witwe.

Vorrede

zur zweyten Auflage.

Im Gebiethe der Wissenschaften, selbst unter den mathematischen, kläret wohl keine den menschlichen Verstand so auf, gewöhnet keine so an eine genaue Ordnung im Denken, und keine schärft die Urtheilskraft so, wie die Geometrie. Sie ist die wahre praktische Logik. Sie zeigt sich indessen nicht nur als unmittelbares und eines der vorzüglichsten Bildungsmittel des Verstandes, sondern ihr Wesen greift auch, theils unmittelbar, theils mittelbar, in viele Künste, Wissenschaften und bürgerliche Geschäfte mächtig ein, unter welchen die Bau- und Meßkunst oben an stehen.

Da die erste Auflage dieses Buches nebst dem öffentlichen Gebrauche, auch zum Privat-Unterrichte, sowohl von Militär- als Civil-Individuen, die sich der Bau- und Meßkunst widmen, vielfach benützt wird, so entschloß ich mich, diese zweyte Auflage so zu bearbeiten, daß sie sowohl zum öffentlichen Gebrauche überhaupt, und in nächster Beziehung

für angehende Forstmänner, nebst diesem aber auch für solche Individuen mit Nutzen gebraucht werden könne, welche sich die zur Bau- und Meßkunst erforderlichen theoretischen Kenntnisse durch Selbstunterricht aneignen wollen.

Um sonach mit dem kürzesten Zeitaufwande zur nöthigen Kenntniß dieser Wissenschaft hinzuleiten, habe ich in dieser Auflage, mit Beseitigung des nicht zum Zwecke Gehörigen, das zu dem vorgesteckten Ziele Nöthige hinzugefügt, und die abgehandelte Materie in einer solchen Ordnung auf einander folgen lassen, wie mir selbe für Anfänger, besonders für solche, die sich ohne Lehrer behelfen müssen, am faßlichsten schien. Ich habe daher, ohne der strengen geometrischen Wahrheit etwas zu vergeben, solche Beweisarten der Lehrsätze zu wählen gesucht, die, ohne zu ermüden und abzuschrecken, dennoch zur nöthigen wissenschaftlichen Erkenntniß und zur Bildung des Verstandes in möglichster Kürze führen.

Es werden daher diejenigen Anfänger der Geometrie, welche durch Verhältnisse bestimmt sind, sich nur die zur gemeinen Bau- und Feldmeßkunst nöthigen geometrischen Gründe eigen zu machen, dadurch in den Stand gesetzt seyn, diese Kenntnisse schon aus den ersten drey Hauptstücken dieses Buches ohne Schwierigkeit sich erwerben, und dann sogleich zu dem praktischen Theile, angewandt auf die Vermessung der Wälder und ganzer Gegenden ꝛc. übergehen zu können. Nur muß ganz billig vorausgesetzt werden, daß sie die leichten und einfachen Lehren von den

Gleichungen, Verhältnissen und Proportionen entweder aus meinem, oder einem andern, Lehrbuche der Rechenkunst und Algebra (3te Auflage 1838) schon gründlich studirt haben, und dann werden sich solche Geometer weit über die empyrischen Feldmesser erheben können.

Diejenigen, welche von der Trigonometrie keinen Gebrauch zu machen gedenken, können nebst dem vierten Hauptstücke auch die §. §. von 98 bis 106 überschlagen; hingegen werden solche, die nicht nur mit dem Meßtische und dergleichen Instrumenten, sondern auch mit den eigentlichen Winkelmeß-Instrumenten auf dem Felde operiren, folglich die dazu so unentbehrlichen trigonometrischen Sätze sich eigen zu machen wünschen, auch die Gründe des vierten Hauptstückes zu studiren haben.

Es gibt Fälle, wo die Polygonometrie vortheilhafter als die Trigonometrie anzuwenden ist, z. B. unter gewissen Umständen bey Vermessuugen von Waldungen, selbst bey Berechnung des trigonometrischen Netzes auf die Orientirungs- oder Mittagslinie einer Gegend durch Abscissen und Ordinaten, u. dgl. Durch diesen Zweig der Winkelmeßkunde, der sich auf die einfachsten trigonometrischen Sätze stützt, und erst in der neuern Zeit bearbeitet wurde, ist diese Wissenschaft unstreitig für jeden Fall zur gewünschten Vollkommenheit gediehen. Ich habe die für den vorliegenden Zweck erforderlichen theoretischen Gründe, des bessern Zu-

sammenhanges wegen, hierher gezogen, die Anwendung derselben aber für den praktischen Theil vorbehalten, und daselbst abgehandelt.

Mariabrunn im May 1824.

Der Verfasser.

Vorrede
zur dritten Auflage.

Dem vielfach ausgesprochenen Wunsche von solchen Lehrern und Individuen, die meine Lehrbücher bey ihrem mathematischen Unterrichte benützen, daß der theoretischen Geometrie bey einer neuen Auflage eine kurze und leicht faßliche Lehre von den Kegelschnitts-Linien und der Differenzial- und Integral-Rechnung beygefügt werden möchte, zu willfahren, habe ich das Wesentlichste dieser Lehrgegenstände im fünften Hauptstücke abgehandelt, und ihre Anwendung auf einige der nützlichsten und werthvollsten Aufgaben, in nächster Beziehung auf den vorhabenden Zweck, in Kürze zu zeigen gesucht. Dadurch dürften wißbegierige Anfänger mathematischer Studien in den Stand gesetzt seyn, die Anfangsgründe dieser so nützlichen mathematischen Lehren auf die einfachste Weise soweit sich eigen zu machen, daß selbe hierauf, nach Bedürfniß und Fähigkeit, auch größere und vollständige Werke mit desto mehr Nutzen werden studiren, und sich weiter fortbilden können.

Diejenigen Individuen hingegen, welche bey ihrem Unterrichte hiervon keinen Gebrauch zu machen gedenken, wer-

den, in Bezug auf den Preis dieses Buches, keinen Nachtheil erleiden, da bey demselben, der Vermehrung ungeachtet, keine Preiserhöhung eingetreten ist.

Die am Ende eines jeden Hauptstückes folgenden Aufgaben sind dem Fleiße und eigenen Nachdenken der Anfänger als Uebung in Bezug auf nützliche Anwendung beygegeben, mit Andeutung derjenigen Lehrsätze, vermittelst welcher sie die Lösung bewirken können.

Die bey der Durchsicht entdeckten Druckfehler, auch minder wesentliche, sind auf dem nächstfolgenden zweyten Blatte angezeigt, welche vor dem Gebrauche verbessert werden wollen.

Mariabrunn im Jänner 1839.

Der Verfasser.

Inhalt.

Seite

Einleitung §. 1 bis 24 3

Erstes Hauptstück.

Eigenschaften der geraden Linien sowohl unter sich, als auch in und außer dem Kreise.

Erster Abschnitt.

Eigenschaften der geraden Linien in verschiedener Lage und Stellung unter sich.

I. Eigenschaften der senkrechten Linien §. 25 bis 31. . . . 21
Anwendung §. 32. 26
II. Eigenschaften der Parallel-Linien §. 33 bis 37. . . . 28
Anwendung §. 38. 32

Zweyter Abschnitt.

Eigenschaften der geraden Linien sowohl in als außerhalb des Kreises, nebst Anwendung §. 39 bis 46. 33

Dritter Abschnitt.

Eigenschaften der geraden Linien, wenn sie eine ebene Fläche einschließen.

I. Von den Vielecken überhaupt §. 47 bis 50. 41
II. Eigenschaften der Dreyecke §. 51 bis 57. 43
III. Von der Ähnlichkeit der Dreyecke §. 58 bis 65. . . . 48
IV. Eigenschaften der symetrischen Vierecke §. 66 bis 70. . . 53
V. Eigenschaften der übrigen Vielecke §. 71 bis 75. . . . 56

Vierter Abschnitt.

Von den Proportional-Linien.

I. Eigenschaften der in ähnlichen Dreyecken gleichliegenden Seiten §. 76 bis 83. 60
Anwendung §. 84. 65
Eben so auf die Construction des geometr. Maßstabes §. 85. . 66
II. Von den proportionellen Theilen gerader Linien, sowohl in als außerhalb des Kreises, nebst Anwendung §. 86 bis 97. . . 69
III. Von der Theilung des Kreises nebst Anwendung §. 98 bis 106. 78

Seite

Fünfter Abschnitt.

Eigenschaften der ähnlichen Vielecke nebst Anwendung §. 107 bis 120 88
Einige nützliche Aufgaben nebst Andeutung, wie selbe von Anfängern durch eigenes Nachdenken zu lösen sind §. 121 99

Zweytes Hauptstück.

Von den Eigenschaften der ebenen Flächen.

Erster Abschnitt.

Bestimmung und Vergleichung des Flächeninhaltes geradliniger Figuren.

I. Von der Bestimmung des Flächeninhaltes überhaupt §. 122 bis 133. 101
II. Bestimmung des Flächeninhaltes der Drey- und Vierecke, so wie der unregelmäßigen Vielecke §. 134 bis 139. . . . 113
III. Bestimmung des Flächeninhaltes regelmäßiger Vielecke nebst Anwendung, §. 140 bis 142. 117

Zweyter Abschnitt.

Vergleichung und Verwandlung geradliniger Figuren §. 143 bis 153 120
Einige Anwendung auf die Theilung der Dreyecke und Vierecke unter verschiedenen Bestimmungen §. 154. 127

Dritter Abschnitt.

Von den nothwendigsten Eigenschaften, welche sowohl aus der Lage und Stellung der geraden Linien mit Ebenen, als auch aus der Lage und Stellung der Ebenen selbst abgeleitet werden können.

I. Eigenschaften der Ebenen mit geraden Linien nebst Anwendung §. 156 bis 161. 135
II. Einige Eigenschaften der Ebenen unter sich §. 162 bis 166. . 140
Einige nützliche Aufgaben nebst Andeutung, wie selbe von Anfängern durch eigenes Nachdenken zu lösen sind §. 167. . . . 143

Drittes Hauptstück.

Von den Eigenschaften der geometrischen Körper.

Erster Abschnitt.

Allgemeine Begriffe von den geometrischen Körpern §. 168 bis 180. 145

Zweyter Abschnitt.

Von der Ausmessung der Oberfläche der Körper §. 181 bis 189. . 157

Dritter Abschnitt.

Von der Ausmessung des Kubikinhaltes der Körper §. 190 bis 212. 164

Seite

Vierter Abschnitt.

Vergleichung und Verwandlung der Körper, nebst einiger Anwendung §. 213 bis 216. 184
Einige nützliche Aufgaben zur Selbstübung nebst Andeutung, wie selbe zu lösen sind §. 217. 191

Viertes Hauptstück.

Von der ebenen Trigonometrie und Polygonometrie.

Erster Abschnitt.

Von der geradlinigen Trigonometrie.

I. Von den trigonometrischen Linien überhaupt §. 218 bis 224. . 193
II. Bestimmung der Größe und Lage der trigonometrischen Linien §. 225 bis 229. 197
III. Von den zur Berechnung der trigonometrischen Linien nöthigen Formeln, und dem Gebrauche der trigonometrischen Tafeln.
A. Von den nöthigen Formeln §. 230 bis 234 202
B. Von der Berechnung der trigonometrischen Linien §. 235 bis 236. 208
C. Von dem Gebrauche der logarithmisch-trigonometrischen Tafeln §. 237 bis 240 211
IV. Von der Berechnung der Dreyecke §. 241 bis 249. . . . 217

Zweyter Abschnitt.

Von der geradlinigen Polygonometrie.

I. Von den polygonometrischen Linien überhaupt §. 250 bis 254. 225
II. Bestimmung der Größe der polygonometrischen Hülfs-Linien §. 255 bis 257. 228
III. Ableitung der polygonometrischen Hauptgleichungen §. 258 bis 260 231
Einige nützliche Aufgaben zur Selbstübung §. 261 235

Dritter Abschnitt.

Aufstellung einiger trigonometrischen Formeln und Anwendung derselben zu Rechnungs-Vortheilen.

I. Ableitung der nützlichsten trigonometrischen Formeln §. 262. . 236
II. Anwendung dieser Formeln §. 263 bis 266. 239
Zwey Tabellen, welche alle bey der Auflösung der Dreyecke vorkommenden Fälle enthalten §. 267. 246

Fünftes Hauptstück.

Von den vorzüglichsten Kegelschnitts-Linien, den Anfangsgründen der Differenzial- und Integral-Rechnung.

Seite

Erster Abschnitt.

Von den Kegelschnitts-Linien überhaupt §. 268 bis 269 . . . 250
I. Die Parabel §. 270 bis 271 252
II. Die Ellipse §. 272 bis 275 256

Zweyter Abschnitt.

Von der Differenzial-Rechnung.

I. Begriffe und allgemeinste Regeln §. 276 bis 279 . . . 264
II. Anwendung der Differenzial-Rechnung §. 280 bis 283 . . 271

Dritter Abschnitt.

Von der Integral-Rechnung.

I. Begriffe und allgemeinste Regeln §. 284 bis 286 . . . 279
II. Anwendung der Integral-Rechnung §. 287 bis 290 . . . 282

Verbesserungen.

Seite	Zeile		anstatt:	muß seyn:
33	9	von oben	AD	AB
46	13	v. unten	$C < A$	$C > A$
58	18	v. u.	zwey Theile	zwey gleiche Theile
63	3	v. o.	§. 1)	§. 38. 1)
77	9	v. u.	beschreibt	beschreibe
91	6 u. 8	v. o.	Mq	$.MQ$
105	12	v. o.	[qkl″	qkl‴
231	14	v. o.	Ordination	Ordinate
232	12	v. u.	als ist die	als die
240	11	v. u.	< (1 Rk.	< 1, (Rk.
254	1	v. o.	Barometer	Parameter
255	10	v. u.	$\sqrt{(p\|x + \frac{1}{4}p)^{1}}$	$\sqrt{(px + \frac{1}{4}p^2)}$
261	1	v. u.	cf	CF
266	2	v. u.	$c\,dz$	$\frac{c}{3}dz$
268	5	v. o.	$-\,dx$	$-\,ax$
269	11	v. o.	$6ax\,dx$	$\frac{6}{5}ax\,dx$

In meiner Rechenkunst und Algebra 3ten Auflage Seite 309, 12te bis 14te Zeile von oben ist $n = 60 = 61 = 62$ zu setzen.

Anfangsgründe

der

theoretischen Geometrie.

Ihr Wesen, war, ist, und wird seyn unveränderlich
durch alle Räume.

Einleitung.

§. 1.

Derjenige Theil der reinen Mathematik, welcher sich mit den Betrachtungen des Ausgedehnten beschäftiget, wird **Geometrie**, oder **Meßkunst** genennt. Fig.

Alles, was wir vermittelst unserer äußeren Sinne wahrnehmen, hat einen begrenzten Raum von **drey** Ausdehnungen, in die **Länge**, **Breite** und **Dicke** oder **Höhe**. Ein solcher begrenzter Raum (dieser mag hohl, wie der Raum eines Zimmers, oder ausgefüllt seyn, wie der Raum eines Würfels) wird **Körper** genennt *).

Um bey diesen Betrachtungen der Körper alles möglichst zu vereinfachen, denkt man sich alle Eigenschaften derselben nebst ihrer Materie indessen hinweg, und betrachtet bloß den Raum, welchen sie einnehmen, d. h. man abstrahirt von allen übrigen Eigenschaften (Rk. 3). **). Ein solcher Raum heißt ein **geometrischer Körper**. In Fig. 1 ***) ist ein solcher Körper vorgestellt, dessen Länge *AB*, 1.
die Breite *BG*, und die Höhe oder Dicke *BC* ist. Ist einmahl der geometrische Raum gemessen und bestimmt, so kann ihm sodann nach Erforderniß was immer für eine Eigenschaft und Materie beygelegt werden.

---

*) In dem unendlichen, unsern Sinnen nicht begrenzten Raume, oder auch in einem solchen endlichen Raume, den unsere Sinne auf Einmahl zu überschauen nicht vermögen, wird der oben genannte Raum immer als gegeben betrachtet.

) Die Zurückweisungen auf die Absätze meines **Lehrbuches der Rechenkunst und Algebra sind nebst dem Zeichen (Rk.) noch mit dem Nro. des Absatzes, nämlich mit (Rk. 1), (Rk. 2) u. s. w.; hingegen die Zurückweisungen auf die Absätze des vorliegenden **Lehrbuches der Geometrie** mit (§. 1), (§. 2) u. s. f. bezeichnet worden.

***) Die Hinweisungen auf die gehörigen Figuren sind am Rande des Textes und nur wenn es die Deutlichkeit unumgänglich erfordert, in demselben angezeigt.

§. 2.

Fig. 1. Denkt man sich bey einem Körper eine von den drey Ausdehnungen, die Dicke, Tiefe oder Höhe, hinweg, so hat man die Grenze des Körpers, die nur noch in die Länge und Breite ausgedehnt ist. Diese flache Ausdehnung ohne Dicke, oder die Grenze eines Körpers, heißt man **Fläche**. Durch *ABCD*, *CDEF*, *BCFG* u. s. w. werden Flächen vorgestellt.

Denkt man ferner von der zweyfachen Ausdehnung einer Fläche wieder eine Ausdehnung, die Breite, hinweg, so hat man die Grenze der Fläche, die nur eine Ausdehnung in die Länge ist; man nennt sie **Linie**. Durch *AB*, *DE*, *GF* u. s. w. werden Linien vorgestellt. Denkt man endlich auch von der Linie die Ausdehnung hinweg, so verbleibt wieder nur die Grenze derselben übrig, welche **Punct** heißt. Den Puncten kann also gar keine Ausdehnung mehr beygelegt werden; durch die Merkmahle *A*, *B*, *C* u. s. w. werden Puncte vorgestellt.

Die drey verschiedenen Größen: **Körper**, **Flächen** und **Linien**, nennt man **stetige** Größen (Rk. 30), und sind in jedem Körper vereint anzutreffen.

§. 3.

Aus den vorigen Erklärungen geht hervor, daß mathematische Puncte und Linien unsern Sinnen niemahls vorgestellt werden können. In der Ausübung pflegt man einen Punct auf dem Papiere durch ein kleines rundes Tüpflein, auf dem Felde durch einen Pflock, Stab, oder etwas ähnliches; eine Linie auf dem Papier durch einen feinen Strich, auf dem Felde aber entweder durch eine ausgespannte Schnur, oder auch durch eine schmale und seichte Vertiefung zu bezeichnen. In diesen physisch vorgestellten Puncten und Linien liegen der mathematische Punct und die mathematische Linie; der Verstand kann sich dieselben darin denken, aber die äußern Sinne können sie nicht wahrnehmen.

a) Ob es gleich in der Wirklichkeit kein Ding gibt, welches bloß eine Länge und Breite ohne Dicke, oder bloß eine Länge ohne Breite und Dicke, u. s. w. hat, daher die Flächen, Linien und Puncte abstracte Begriffe sind: so ist es doch nothwendig, diese Begriffe in der Theorie fest zu setzen, weil selbst in der Ausübung öfters bloß die Länge ohne Breite und Dicke zu wissen verlangt wird. Wenn man z. B. nach der Größe eines Feldes, Waldes, oder einer Wiese fragt, so verlangt man nur eine Kenntniß von der Ausdehnung in die Länge und Breite ohne Dicke. Wer nach einem gewissen Ort reisen will, fragt nicht, wie breit, sondern wie lang der Weg sey. Wenn von der Breite eines Flusses die Rede ist, so versteht man darunter bloß den Abstand des

einen Ufers von dem anderen, ohne die Länge und Tiefe des Flusses in Betrachtung zu ziehen, u. s. f.; und in so ferne können die abstracten Begriffe von Flächen, Linien und Puncten auch als wirklich vorhanden gedacht werden. Fig. 1.

§. 4.

Da die Grenzen einer Linie, d. h. ihr Anfang und ihr Ende, Puncte, die Grenzen einer Fläche, Linien, und die Grenzen eines Körpers, Flächen sind (§. 2); so kann man sich die Entstehungsart der drey stetigen Größen auch durch die Bewegung ihrer Grenzen vorstellen.

1) Denkt man sich demnach, daß sich ein Punct A von seinem Orte nach einem andern D bewegt: so wird, weil er selbst keine Ausdehnung hat, auch der Weg, den er durchläuft, keine andere Ausdehnung haben als die Länge; folglich muß diese Ausdehnung eine Linie seyn (§. 2).

a) Man muß daher zwischen Puncten und Theilen einer Linie wohl unterscheiden, daß ein Theilchen oder Element einer Linie immer noch eine kleine Linie ist, und nicht als ein Punct, in dem Verstande des §. 2 genommen, betrachtet werden kann; so wie z. B. ein Theilchen von einem Stück Golde nichts anders als Gold, und kein Bley seyn kann. Denn setzet man zu einer Linie eine unendlich kleine Linie hinzu, so wird sie um diesen unendlich kleinen Theil vergrößert, oder denkt man sich unendlich viele unendlich kleine Theilchen einer Linie an einander gereihet, so entstehet daraus eine Linie (Rk. 329); denkt man aber zu einer Linie noch so viele Puncte hinzu, so wird sie nicht verlängert, weil Puncte keine Ausdehnung zulassen (§. 2).

2) Bewegt sich eine Linie AD anders als nach ihrer eigenen Richtung, etwa bis BC, so hat der Weg, den sie durchläuft, zwey Ausdehnungen, nämlich diejenige, welche die Linie vor der Bewegung schon hatte, und jene Ausdehnung, welche durch die Bewegung erzeugt wurde; mithin muß diese doppelte Ausdehnung eine Fläche seyn (§. 2).

b) Es ist also auch hier wieder wohl zu merken, daß die Linien nicht als Theile oder Elemente einer Fläche angesehen werden können; weil die erstern vermöge §. 2 keine Breite haben, so würden sie doch, wenn man auch unzählige Linien an einander gelegt denkt, nie eine Fläche ausmachen; wohl aber bilden unendlich kleine Theilchen oder Elemente einer Fläche, die nämlich eine unendlich kleine Breite haben, wenn deren mehre neben einander gelegt werden, eine Fläche.

3) Bewegt sich endlich eine Fläche $ABCD$ anders als nach ihrer Lage, z. B. bis in $EFGH$, so bringt ihre Bewegung wieder eine

Fig. neue und dritte Ausdehnung hervor; nämlich zwey, *AB* und *AD*,
1. hatte die Fläche vor der Bewegung schon, die dritte *DE* aber, wurde während der neuen Bewegung erzeugt; folglich muß diese dreyfache Ausdehnung ein Körper seyn (§. 1).

c) Doch kann man aus diesem keineswegs folgern, daß ein Körper aus Flächen zusammengesetzt sey. Denn wollte man z. B. mehre Flächen auf einander gelegt denken: so werden sie, wenn deren auch unendlich viele wären, doch nie einen Körper bilden, weil jene keine Dicke oder Höhe haben, daher über einander fallen, und nur eine einzige Fläche ausmachen. Denkt man aber mehre unendlich kleine Körperchen oder Elemente, die nämlich eine unendlich kleine Dicke oder Höhe haben, über einander gelegt: so bilden sie einen Körper.

§. 5.

Bey der gedachten Entstehung einer Linie durch die Bewegung eines Punctes kann man sich vorstellen, daß dieser, wo man nur immer will, sich zu bewegen aufhört; man kann daher in einer Linie nach ihrer ganzen Ausdehnung wo man will, Puncte annehmen; aus eben diesem Grunde kann man in einer Fläche nach Belieben eine Linie, und in einem Körper wo immer eine Fläche sich denken. Und weil das Ende des einen Theiles einer stetigen Größe, zugleich auch der Anfang des andern neben liegenden Theiles ist (Rk. 30); so haben jede zwey nach einander folgende Theile einer Linie einen Punct, jede zwey neben einander liegende Theile einer Fläche eine Linie, und jede zwey neben einander folgende Theile eines Körpers eine Fläche mit einander gemein.

§. 6.

Von einem Puncte *A* zu einem andern *B* können so viele Linien
2. gedacht werden, als man will. Unter diesen befindet sich Eine, die bey der Umdrehung dieses ganzen Linien-Systems um die Puncte *A* und *B* stets ihre Lage beybehält, folglich während der ganzen Umdrehung keinen Raum von dreyfacher Ausdehnung, wie jede der übrigen Linie, beschreibt. Man nennt sie die gerade Linie, oder nur kurz die Gerade. Jedermann hat von ihr einen klaren Begriff, weil ihre Vorstellung eben so, wie die mit ihr verwandte einer Richtung zu den ursprünglich einfachen Begriffen gehört, daher weder erklärt, noch auf einen noch einfachern Begriff zurückgeführt werden kann (Rk. 5 u. 10).

Leitet man den Begriff der Ausdehnungen aus der im §. 4 angeführten Erzeugungsart durch die Bewegung ihrer Grenzen her: so entstehet in der Ausübung eine gerade Linie *AB*, wenn ein Punct

A während seiner ganzen Bewegung weder auf die eine noch auf die andere Seite ausweichet, sondern immer seine anfängliche Richtung beybehält; verändert aber der Punct *A* während der Bewegung alle Augenblicke und unmerklich seine Richtung: so entstehet eine krumme Linie *ACB*, und *ADB*. Verändert der Punct *A* nicht alle Augenblicke und unmerklich, sondern in Absätzen *AE*, *EF*, *FB* plötzlich seine Richtung: so entstehet eine gebrochene Linie *AEFB*, oder eine aus geraden zusammengesetzte Linie. Ist eine Linie aus geraden und krummen zusammengesetzt, wie *AMKLB*, so wird sie eine gemischte Linie genennt. Fig. 2.

a) Um eine gerade Linie auf dem Papier zu ziehen, bedienet man sich des bekannten hölzernen Lineals (Fig. 3). Ein derley Lineal aber zu prüfen, ob es gerade sey, verfährt man auf folgende Art: Man lege dasselbe dergestalt an zwey Puncte *A* und *B*, daß der Rand des Lineals genau an beide Puncte anliegt, und ziehe in dieser Lage scharf am Rande des Lineals mit einem Bleystifte eine feine Linie. Nun wende man das Lineal dergestalt um, daß die untere Fläche desselben, welche auf dem Papier lag, jetzt oben, die obere Fläche aber unten zu liegen komme, so wie es die Buchstaben *p' q'* und *p q* weisen, lege den nämlichen Rand wie vorhin an die zwey Puncte *A* und *B*, und ziehe wieder eine feine Linie. Wenn nun die zwey gezogenen Linien eine einzige ausmachen, so ist das Lineal möglichst gerade; zeigen sich hingegen irgendwo zwey Linien neben einander, wie bey *m* und *n*, so hat dasselbe Erhöhungen oder Vertiefungen, welche auf folgende Weise gleich gemacht werden können. 3.

Man lasse bey einem Tischler in ein Bret von hartem Holze ungefähr von der Länge des Lineals eine Fuge ausstoßen, bestreue diese mit feinem nassen Sande, und fahre dann auf diesem Sande mit der schmalen Fläche des Lineals so lange hin und her, bis es die obige Eigenschaft erhalten hat.

§. 7.

Die Haupteigenschaften einer geraden Linie sind:

1) Sie ist der kürzeste Weg zwischen ihren Endpuncten.
2) Ihre Richtung wird durch jede zwey Puncte bestimmt; daher machen jede zwey gerade Linien, welche zwey Puncte mit einander gemein haben, nur eine und dieselbe gerade Linie aus.
3) Zwey sich durchschneidende gerade Linien haben nur Einen Punct mit einander gemein, das ist, sie durchschneiden sich nur ein einziges Mahl. Auch ist begreiflich, daß durch zwey Puncte *A* und *B* nur eine einzige Gerade gezogen werden kann, weil alle übrige gerade Linien, wenn man sie auch in Gedanken ziehen wollte, mit der ersten übereinfallen, und mit derselben doch immer nur

Fig. eine einzige Gerade ausmachen würden. Übrigens kann eine gerade Linie *AB* vor- und rückwärts nach Belieben verlängert, oder auch wo immer ein kleineres Stück davon abgeschnitten werden.

§. 8.

4. Zwey gerade Linien *ab* und *dc* sind einander gleich, wenn sie, nachdem selbe mit einem ihrer Endpuncte *a* und *d* über einander gelegt worden sind, auch mit ihren zweyten Endpuncten *b* und *c* über einander fallen. Da hierbey die eine Gerade von der andern ganz gedeckt wird, so heißt man die gleichen Linien auch congruente (sich deckende) Linien. Nun erhellet die Ungleichheit zweyer geraden Linien *ab* und *dh* von selbst; wenn nämlich bey der Übereinanderlegung der ersten zwey Endpuncte die andern zwey nicht über einander fallen, sondern der eine über den andern entweder hinaus fällt, oder aber ihn nicht erreicht.

§. 9.

Eine gerade Linie ausmessen heißt untersuchen, wie oft eine willkührliche, für die Einheit angenommene Länge, das Maß, in der auszumessenden Linie enthalten ist. Die Zahl nun, welche anzeigt, wie oft die, für die Einheit angenommene Länge in der auszumessenden Linie enthalten ist, gibt die Länge dieser Linie in eben solchen Einheiten, als das Maß ist, zu erkennen (Rk. 21). Will man z. B. die Länge eines Hauses messen, und man hat zum Maße die Klafter angenommen und gefunden, daß sie 24 Mahl in der ganzen Länge des Hauses enthalten ist: so weiß man nun, daß das Haus 24 Klafter zur Länge hat; hätte man den Schuh als Einheit zum Maße gewählt und gefunden, daß dieser 144 Mahl in der Länge des Hauses enthalten sey: so hat man diese Länge in Schuhen ausgedrückt, u. s. w. Ist die als Maß gewählte Einheit in der auszumessenden Länge nicht genau enthalten, sondern bleibt, nachdem man die gewählte Maßeinheit so oft Mahl aufgetragen hat, als es anging, noch ein Stück übrig (welches natürlich kleiner als das Maß seyn muß): so kann ihre Länge nicht in einer ganzen, sondern muß in einer gebrochenen Zahl ausgedrückt werden (Rk. 22). In diesem Falle wählet man zur Messung des übrig gebliebenen Stückes einen bestimmten, z. B. den 10ten oder 100sten Theil der Maßeinheit, und verfährt damit eben so, wie vorhin mit dieser selbst. Bleibt nun wieder ein Stück übrig, so wählt man abermahl den 10ten oder 100sten Theil des vorhin genommenen, folglich den 100sten oder 1000sten Theil der Maßeinheit, u. s. w. Auf diese Art kann man sich in jedem

Falle der Wahrheit so weit nähern, als es die schärfste Bestimmung nur immer erfordern mag. Fig. 4

Es sey df eine zu messende Länge, A die gewählte Maßeinheit, welche in jener $m=4$ Mahl nebst einem Reste ef enthalten ist. Für die Messung ef sey $B=\frac{1}{10}A$ das Maß, welches in ef, $n=2$ Mahl nebst einem Reste gf enthalten ist. Um gf zu messen sey $C=\frac{1}{10}B=\frac{1}{100}A$ das Maß, und in gf genau $r=3$ Mahl enthalten: so ist demnach die ganze Länge $df=de+ef$*) $=m.A+ef=m.A+n.B+gf=m.A+n.B+r.C=m.A+n.\frac{1}{10}A+r.\frac{1}{100}A$ $=4A+\frac{2}{10}A+\frac{3}{100}A=A\left(\frac{4.100+2.10+3}{100}\right)=A\left(\frac{400+20+3}{100}\right)$ $=A.\frac{423}{100}=A.4{,}23$. Bedeutet z. B. die gewählte Maßeinheit $A=1$ Klafter, so ist die Länge $df=1^{\circ}.4{,}23=4{,}23$ Klaftern.

Wie man gerade Linien sowohl auf dem Papier als auf dem Felde nach einer kürzern Weise wirklich ausmißt, wird am gehörigen Orte gezeigt werden.

§. 10.

Eine Fläche von der Beschaffenheit, daß jede gerade Linie, die man durch was immer für zwey Puncte auf derselben zieht, jedesmahl nach ihrer ganzen Länge auf der Fläche liegt, folglich alle Puncte mit der Fläche gemein hat, heißt eine ebene Fläche, oder auch kurz eine Ebene. An einer ebenen Fläche müssen daher alle Theile derselben einerley Richtung haben. Nun erhellet von selbst, daß diejenigen Flächen, wo dieses nicht überall Statt findet, unebene oder krumme Flächen genennt werden.

Alle Betrachtungen, die man in der Meßkunst vornimmt und verrichtet, beziehen sich auf eine und dieselbe Ebene, wenn nicht das Gegentheil ausdrücklich erinnert wird.

---

*) Da die Linien, Flächen und Körper als Größen ebenfalls nur durch eine gleichartige Maßeinheit meßbar, daher als Vielfache einer Maßeinheit, so wie die unstetigen Größen durch Zahlen bestimmbar sind: so gelten die in der Arithmetik aufgestellten allgemeinen Grundsätze und daraus abgeleiteten Regeln für die Rechnungsarten, so wie die Operationzeichen derselben auch hier für die stetigen Größen. Nur in Hinsicht auf die negative Bezeichnung einer Linie ist vor der Hand nöthig zu erinnern, daß sie für uns in der Geometrie in keiner andern Beziehung vorkommt, als in der Differenz zweyer Linien. So z. B. wird die Differenz der zwey Linien ab und dh angedeutet durch $dh-ab$, obschon ab in Hinsicht auf dh keine entgegengesetzte Lage hat. In Bezug auf die letztere Eigenschaft werden wir die Linien erst weiter unten in der Trigonometrie kennen lernen.

§. 11.

Fig. 5 Drehet sich auf einer Ebene eine unveränderliche gerade Linie *AM* um einen unbeweglichen Punct *M*, bis sie wieder in ihre vorige Lage kommt, so beschreibt der Punct *A* eine in sich selbst zurückkehrende krumme Linie *AHDBGA* von der Eigenschaft, daß jeder Punct *A*, *F*, *B*, *G*, *C* dieser krummen Linie, von dem in der Mitte liegenden Punct *M* gleich weit absteht. Denn die Gerade *AM* hat sich während ihrer Bewegung um den unbeweglichen Punct *M* in ihrer Länge nicht verändert, daher ist jeder Punct dieser krummen Linie von dem Puncte *M* gleich weit entfernt. Diese in sich selbst geschlossene krumme Linie heißt man die Kreislinie, oder auch Zirkellinie, Umkreis, Peripherie; den Punct *M* ihren Mittelpunct (centrum), und die ebene Fläche, welche von der Geraden *AM* während ihrer Bewegung beschrieben (§. 4.), und von der Kreislinie eingeschlossen worden ist, heißt Kreis, oder Zirkel, auch Kreis- oder Zirkelfläche.

Jeder Theil *AE*, *DF*, *BG* u. s. w. des Umkreises wird ein Kreisbogen (arcus); jede Gerade zwischen zwey Puncten des Umkreises, z. B. *EF*, eine Sehne (chorda); jede Sehne *AB*, welche durch den Mittelpunct gezogen ist, der Durchmesser (diameter); jede Gerade *MD*, welche von dem Mittelpuncte bis an den Umkreis geht, der Halbmesser (radius); jeder Theil *AMCA* des Kreises zwischen zwey Halbmessern und einem Kreisbogen, ein Ausschnitt (sector); und endlich jeder Theil *EFHE* des Kreises zwischen einer Sehne *EF* und einem Bogen *EHF* wird ein Kreisabschnitt (segment) genannt.

Zwey oder mehre Kreise, die mit verschiedenen Halbmessern *Ma* und *MA* aus einem Mittelpuncte *M* beschrieben sind, mithin überall gleiche Abstände, d. h. die Differenz der Halbmesser $MA - Ma$, also $Aa = Cc = Bb = Dd$ u. s. w. haben, werden concentrisch genannt; hingegen heißen sie excentrisch, wenn selbe mit gleichen oder verschiedenen Halbmessern aus verschiedenen Mittelpuncten beschrieben werden.

§. 12.

Vollkommen gleiche Größen, welche nur durch die Verschiedenheit ihres Ortes von einander unterscheidbar sind (als z. B. gerade Linien von einerley Länge, Kreise von gleichen Halbmessern, u. s. w.), decken einander, wenn sie gehörig auf einander dergestalt gelegt werden,

daß die Grenzen der einen Größe auf die Grenzen der andern fallen; und umgekehrt, Größen sind einander vollkommen gleich, wenn bey gehöriger Übereinanderlegung derselben, ihre Grenzen sich decken. Diese geometrische Grundwahrheit nebst den folgenden zwey Forderungssätzen: Fig. 5

I. Durch jede zwey gegebene oder beliebig gewählte Puncte kann eine gerade Linie gezogen oder gedacht und beyderseits nach Belieben verlängert werden;

II. Aus jedem gegebenen oder gewählten Puncte kann mit einem bestimmten oder beliebigen Halbmesser ein Kreis beschrieben werden,

muß man zu den in der Rechenkunst aufgestellten allgemeinen Grundsätzen hinzufügen, um daraus die meisten Wahrheiten in der Mathematik herzuleiten. Das erste, nämlich der Zug und die Verlängerung einer geraden Linie geschehen auf dem Papiere oder auf einer andern kleinen ebenen Fläche mittelst des Lineals (§. 6. a) und einer Reißfeder oder Bleystifte; auf dem Felde hingegen durch mehre hinter einander gerade aufgerichtete Pflöcke oder Stäbe, die man nach Erforderniß mit einer Schnur verbindet, und längs derselben die gerade Linie, wenn es nöthig ist, mit einer seichten Vertiefung bezeichnet, welches jedoch im practischen Theile deutlicher gezeigt werden wird.

Das Zweyte hingegen wird auf dem Papiere mittelst des bekannten Zirkels, auf dem Felde aber durch Hülfe einer Schnur oder Meßkette verrichtet, von der man das eine Ende an einen in dem angenommenen Mittelpuncte stehenden Pflock *M* durch eine bewegliche Schlinge oder einen Ring der Meßkette befestiget, und sodann die gegebene Länge des Halbmessers auf der Schnur oder Kette von *M* nach *A* aufträgt, in *A* an der Schnur einen andern spitzigen Pflock befestiget, und so mit gleichförmiger Anspannung der Schnur oder Kette, durch den allda befestigten und lothrecht gehaltenen Pflock die Kreislinie während der Umdrehung auf der Erde aufreißt.

Das Lineal und der Handzirkel sind die einzigen zwey Instrumente, deren man sich in der reinen Geometrie bedienet.

§. 13.

Folgerungen aus der Entstehungsart des Kreises:

1) Alle Halbmesser eines nämlichen Kreises sind einander gleich,

Fig. 5 weil der Umfang des Kreises von dessen Mittelpunct überall gleich weit entfernt ist (§. 11).

2) Auch alle Durchmesser eines Kreises müssen einander gleich seyn, weil jeder Durchmesser der doppelten Länge eines Halbmessers gleich ist (§. 11).

3) In einem und demselben Kreise schneiden gleiche Sehnen auch gleiche Bogen, und umgekehrt, gleiche Bogen schneiden gleiche Sehnen ab. Es sey z. B. die Sehne $AC = BD$, so ist auch der Bogen $AnC = BmD$. Denn man denke sich den Abschnitt $DBmD$ dergestalt auf den Abschnitt $ACnA$ gelegt, daß der Punct D auf A, und B auf C zu liegen komme: so werden sich die Sehnen, weil sie gleich sind, und auch die Bogen einander decken, weil alle ihre Puncte $m, n \ldots\ldots$ von dem Mittelpuncte gleich weit entfernt sind, und ihre Endpuncte über einander fallen; folglich müssen die Bogen einander gleich seyn (§. 12).

4) In einem und demselben Kreise gehören zu größern Sehnen auch größere Bogen, zu kleinern Sehnen aber kleinere Bogen; und umgekehrt gehören zu größern Bogen auch größere Sehnen, zu kleinern Bogen aber kleinere Sehnen. Jedoch gehört zu einer 2, 3, 4, ... $n$fachen Sehne nicht auch ein 2, 3, 4, ... $n$facher Bogen, wie wir an seinem Orte sehen werden.

5) Jeder Durchmesser theilet sowohl die Kreisfläche, als auch den Umkreis in zwey gleiche Theile. Es sey z. B. AB ein Durchmesser; legt man nun in Gedanken den Theil $AHBA$ auf den andern Theil $AGBA$ des Kreises, so werden sie einander decken, weil alle Puncte des einen Theiles von dem Mittelpuncte eben so weit, als die Puncte des andern Theiles entfernt sind; folglich sind sie einander gleich (§. 12).

6) Daß endlich alles dieses auch bey zwey oder mehrern Kreisen gilt, wenn sie mit gleichen Halbmessern beschrieben werden, erhellet vermög §. 12. von selbst.

§. 14.

Der Umfang eines jeden, sowohl großen als kleinen Kreises wird gewöhnlich in 360 gleiche Theile abgetheilt, die man **Grade** nennt. Jeder Grad wird in 60 gleiche Theile, die **Minuten** heißen, und jede Minute in 60 **Secunden** abgetheilt, u. s. w. Die Grade, Minuten, Secunden, Terzen u. s. f. werden mit (°) (′) (″) (‴) bezeichnet; z. B. ein Bogen von 35° 56′ 22″ wird also gelesen: **Ein Bogen von 35 Graden, 56 Minuten, 22 Secunden.** Es müssen

demnach die Grade, Minuten, ꝛc. bey einem großen Kreise größer Fig.
als bey einem kleinern seyn. Diese Abtheilung des Umkreises ist bloß 5.
willkührlich; man hat die Zahl 360 aus dem Grunde gewählt, weil sie aus sehr vielen Factoren zusammen gesetzt ist (Rk. 81).

a) Die neueren französischen Mathematiker theilen den ganzen Umkreis in vier gleiche Theile (in 4 Quadranten), jeden Quadranten in 100 Centesimal-Grade, jeden solchen Grad in 100 Centesimal-Minuten, und jede solche Minute in 100 Centesimal-Secunden.

b) Man hat zwar in der Rechenkunst (32) die Klafter, Schuhe, Zolle, u. s. w. mit eben denselben Zeichen, wie hier die Grade, Minuten, Secunden, u. s. w. bezeichnet; dessen ungeachtet aber wird hierdurch nie eine Irrung entstehen, weil es immer aus dem Texte deutlich erhellen wird, ob diese Bezeichnung Längen- oder Bogenmaß bedeuten soll. So wird man z. B. lesen: die Linie von 15° 2′ 7″ (die Linie von 15 Klaftern, 2 Schuh, 7 Zoll); oder der Bogen von 62° 49′ 26″ (der Bogen von 62 Graden, 49 Minuten, 26 Secunden) u. s. w.

§. 15.

Wenn zwey gegen einander sich neigende gerade Linien gehörig 6.
und hinreichend verlängert werden, so entsteht eine von zwey Seiten begrenzte von der dritten Seite aber offene Ebene, welche man einen **Winkel** nennt. Die geraden AC und BC heißen die **Seiten** oder **Schenkel** desselben, und der Punct C, welchen beyde Schenkel gemein haben, wird der **Scheitel** (vertex) oder die **Spitze** des Winkels genennt.

a) Ist der Scheitel eines Winkels mehrern Winkeln gemeinschaftlich, so pflegt man einen Winkel entweder durch **drey** Buchstaben, wovon derjenige beym Scheitel in der Mitte ausgesprochen wird, oder auch nur durch Einen in die Öffnung geschriebenen Buchstaben auszudrücken; man sagt z. B. der Winkel AMC oder BMC, oder auch 5.
der Winkel u. Der mehrern Deutlichkeit wegen, bezeichnet man öfters einen Winkel nahe beym Scheitel nebst einem Buchstaben auch noch mit einem kleinen Bogen, wie z. B. der Winkel ν. Gehört aber der Scheitel nur zu Einem Winkel, so genügt es schon, wenn man nur den Buchstaben beym Scheitel nennt, und sagt: der Winkel C, oder c (Fig. 6).

§. 16.

Wenn man mit einem beliebigen Halbmesser MB aus der Spitze 5.
M eines Winkels DMB zwischen seinen Seiten oder Schenkeln einen Bogen DmB beschreibt, so wird dieser das **Maß** oder die **Größe** des Winkels genennt. Denn durch die Anzahl der Grade des Bogens

Fig. 5. DmB, oder vielmehr durch sein Verhältniß zu dem ganzen Umkreise, wird die Größe des Winkels bestimmt, das heißt: Da (§. 14) der ganze Umkreis $AHBCA = 360°$ ist, und enthält z. B. der Bogen $DmB = 60°$, so verhält sich (vermög Rk. 72. I. u. 253.5) $AHBCA : DmB = 360° : 60°$; daraus finden wir den Bogen $DmB = \frac{AHBCA}{6}$ = dem sechsten Theil des ganzen Umkreises. Eben so findet man den Bogen $db = \frac{adbca}{6}$.

a) Bey der Bestimmung der Größe eines Winkels ist es daher einerley, ob man den Kreisbogen mit einem kleinen Halbmesser aM, oder mit einem größern AM beschreibt; denn die Verlängerung oder Verkürzung der Schenkel trägt zur Größe eines Winkels nichts bey.

§. 17.

6. Zwey Winkel ACB und acb sind einander gleich, wenn ihre Schenkel, nachdem ihre Spitzen C und c auf einander gelegt worden sind, auch über einander fallen und sich decken; oder auch, zwey Winkel sind gleich, wenn die aus ihren Scheiteln C und c mit einerley Halbmesser CA und ca zwischen ihren Schenkeln beschriebenen Bogen ADB und adb, oder deren Sehnen AB und ab gleich sind. Gleiche Winkel sind also auch congruent. Die Ungleichheit der Winkel erhellet nun von selbst. Die nächste Anwendung hiervon ist folgende

Aufgabe. An eine gerade Linie ac aus einem gegebenen Puncte c einen Winkel zu verzeichnen, der einem gegebenen Winkel ACB gleich ist.

Auflösung. Man beschreibe mit einem beliebigen Halbmesser CA aus dem Scheitel C des gegebenen Winkels zwischen seinen Schenkeln einen Bogen ADB, und sodann mit eben diesem Halbmesser aus dem Puncte c einen Bogen adb von unbestimmter Länge. Fasse hierauf die Sehne AB, und übertrage sie auf den Bogen adb von a bis b, verbinde diesen Punct b mit dem gegebenen c durch eine Gerade: so ist der Winkel $bca = BCA$.

Denn die Bogen ADB und adb mit einerley Halbmesser beschrieben, gehören zu Einem Kreise. Durch die Übertragung der Sehne $AB = ab$ sind auch die Bogen $ADB = adb$ (§. 13); folglich haben diese Winkel einerley Maß, daher gleiche Größe (§. 16 und 17).

Die Auflösung dieser Aufgabe auf dem Felde gehört in die practische Geometrie.

a) Diese Verzeichnung kann auch durch Hülfe des bekannten Instrumentes geschehen, welches ein Winkelmesser (Transporteur) genennt wird, und aus einem Halbkreise von Messing, ungefähr 3 Zolle im Duchmesser besteht, dessen Rand in 180 Grade abgetheilet ist. Dieses Instrument dienet nicht nur auf dem Papier Winkel zu messen, sondern auch Winkel von einer beliebigen Anzahl Grade zu verzeichnen. So wird z. B. der Winkel $DCB=45°$, der Winkel ACD aber $135°$ seyn. Fig. 7.

b) Die erste Art, Winkel zu verzeichnen, ist rein geometrisch (§. 12); die zweyte aber durch Hülfe des Transporteurs mechanisch und gewährt nie eine solche Richtigkeit wie jene.

§. 18.

Aus der verschiedenen Anzahl der Grade, welche ein Winkel enthalten kann, entstehen dreyerley Gattungen derselben, nämlich rechte, spitzige und stumpfe Winkel. Ein rechter Winkel ist derjenige, der genau den vierten Theil des ganzen Umkreises, d. i. 90° zwischen seinen Seiten oder Schenkeln enthält *), und daher jederzeit unveränderlich bleibt; es gibt also nur Einen rechten Winkel. Hingegen heißt ein Winkel spitzig, wenn er weniger als 90°, stumpf aber, wenn er mehr als 90° enthält; diese letztern beyden Winkel können ihre Anzahl der Grade unzählige Mahl verändern, das ist, bald mehr, bald weniger spitzig oder stumpf seyn.

§. 19.

Wenn der eine Schenkel eines Winkels BMC am Scheitel verlängert wird, so entstehen dadurch zwey Winkel BMC und CMA, 8. die einen Schenkel CM gemein haben, und deren andere zwey Schenkel AM und BM in einer geraden AB liegen; man nennt solche zwey Winkel Nebenwinkel, und beyde zusammen enthalten jedesmahl 180 Grade. Denn man denke sich aus dem Scheitel M mit einem beliebigen Halbmesser MA einen Bogen ACB auf der Linie AB beschrieben; so ist dieser Bogen die Hälfte vom ganzen Umkreise, und enthält 180 Grade, weil man die Gerade AB als einen Durchmesser betrachten kann (§. 13. 5.). Nun ist der Bogen AC das Maß des Winkels AMC, und der Bogen CB das Maß des Winkels CMB (§. 16.); nämlich die Bogen $AC + CB$ = dem halben Umkreise = 180 Grade sind das Maß der beyden Nebenwinkel zusammenge-

---

*) Nach der neuesten französischen Eintheilung enthält der rechte Winkel 100 Grade. (§. 14 unter a).

Fig. 8. nommen; folglich enthalten zwey Nebenwinkel zusammen 180 Grade.

Ist einer von den Nebenwinkeln bekannt, so ist dadurch auch die Größe des andern bestimmt. Sind demnach zwey Nebenwinkel einander gleich, so hat jeder 90°, und jeder ist ein rechter Winkel. Verlängert man den Schenkel CM des Winkels CMB, so kann auf eben diese Art gezeigt werden, daß auch $DMA + AMC = 180°$ ist. Auch ist leicht einzusehen, daß mehre Nebenwinkel auf einer geraden Linie zusammen 180 Graden gleich seyn müssen; wie auch, daß alle Winkel um einen Punct M herum, z. B. AMD, DMB, BMC, CMA, wenn ihrer auch noch so viele wären, zusammen 360 Grade enthalten.

§. 20.

Werden beyde Schenkel eines Winkels CMB am Scheitel verlängert, so heißen die dadurch entstehenden entgegengesetzten zwey Winkel CMB und AMD Scheitelwinkel (Verticalwinkel); eben so sind AMC und DMB Scheitelwinkel. Jede zwey Scheitelwinkel sind einander gleich.

Denn es ist $AMC + CMB = 180°$
und auch $AMD + AMC = 180°$ } vermöge §. 19;

folglich ist $AMC + CMB = AMD + AMC$ (Rk. 40 III.),
und endlich $CMB = AMD$ (Rk. 54 Grundſ. I.

Auf dieselbe Art läßt sich beweisen, daß der Winkel $BMD = AMC$ ist; folglich sind jede zwey Scheitelwinkel einander gleich. Ist demnach einer aus diesen vier Winkeln bekannt, so sind auch die übrigen drey bekannt. Es sey z. B. der Winkel $AMD = 35°$, so ist $AMC = 180° - 35° = 145°$, $CMB = 35°$ und der Winkel $DMB = 145°$.

§. 21.

9. Wenn man die Endpuncte C und B der Schenkel AC und AB eines Winkels CAB mit einer Geraden CB verbindet, und dadurch die Öffnung desselben begrenzt, so wird die nun von drey geraden Linien eingeschlossene ebene Fläche ein Dreyeck, und die Geraden AC, CB und AB werden die Seiten desselben genennt.

In jedem Dreyecke ist die Summe zweyer Seiten immer größer als die dritte Seite; es ist z. B. $AC + CB > AB$. Dieß folgt aus der Eigenschaft der geraden Linie (§. 6 und 7), weil zwischen zwey Puncten A und B nur eine einzige

Gerade *AB* möglich ist, die jedesmahl kürzer, als jeder Umweg von *A* über *C* nach *B* seyn muß; der Punct *C* mag übrigens noch so nahe an der Geraden *AB* liegen. Fig. 9.

Da bey jedem Winkel *A* durch die Verbindungslinie *CB* zu einem Dreyecke noch zwey Winkel *C* und *B* entstehen, so hat jedes Dreyeck drey Seiten und auch drey Winkel, welche auf mancherley Art verändert werden können. Es gibt daher sowohl in Hinsicht der erstern als der letztern dreyerley Gattungen von Dreyecken, nämlich:

In Ansehung der Seiten gibt es gleichseitige, gleichschenkelige und ungleichseitige Dreyecke. Sind alle drey Seiten von gleicher Länge, so heißt das Dreyeck gleichseitig; sind nur zwey Seiten einander gleich, so wird das Dreyeck gleichschenkelig, und endlich wird ein Dreyeck ungleichseitig genennt, wenn alle drey Seiten von ungleicher Länge sind.

In Hinsicht auf die Winkel heißt ein Dreyeck rechtwinkelig, wenn es einen rechten, stumpfwinkelig, wenn es einen stumpfen Winkel enthält, und endlich spitzwinkelig, wenn alle drey Winkel spitzig sind.

An einem rechtwinkeligen Dreyecke *ACB* (Fig. 12) wird noch insbesondere die dem rechten Winkel gegenüberstehende Seite *BC* die Hypothenuse, die übrigen zwey Seiten *AB* und *AC* aber, die nämlich den rechten Winkel einschließen, werden die Katheten genennt.

§. 22.

Dreyecke können auf zweyerley Art einander gleich seyn: 1) in Hinsicht auf gleiche Form, d. i., wenn ihre Seiten und Winkel einzeln wechselweise gleich groß sind, wobey sie sich decken, wenn sie gehörig über einander gelegt werden; aus diesem Grunde heißt man solche Dreyecke auch deckend oder congruent. 2) In Hinsicht auf Gleichheit ihrer Flächen, bey verschiedener Größe der Seiten und Winkel, wobey sie sich nicht decken. Dreyecke von dieser Eigenschaft heißen gleichhaltig, und können erst weiter unten in Betrachtung kommen. Hingegen wollen wir die Haupteigenschaften der Dreyecke, welche aus der Gleichheit ihrer Form (vermög 1) entspringen, und sich auf die schon bekannte Grundwahrheit (§. 12) stützen, hier vorläufig aufstellen, um andere nützliche Lehren darauf bauen zu können.

Fig. a) In der Geometrie ist es gewöhnlich, daß man diejenigen Linien, welche unmittelbar zur Construction (Aufzeichnung) einer Figur gehören, scharf zieht, die andern hingegen, welche nur zum Behuf des Beweises eines Satzes dienen, und nicht unmittelbar zur Figur gehören, werden nur durch Puncte angezeigt. Erstere heißen Constructions-Linien, wie AB und CD (Fig. 10); die letztern aber werden Hülfslinien genennt, wie AC, CB, AD u. s. w.

§. 23.

9. Die Haupteigenschaften der Dreyecke sind folgende:

1) Wenn an zwey Dreyecken ABC und abc zwey Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel einzeln wechselweise gleich sind, so decken sich die Dreyecke, und es sind daher auch die übrigen Stücke der Dreyecke einzeln wechselweise einander gleich; nämlich

wenn $BC = bc$, $BA = ba$, und der Winkel $B = b$ ist:

---

so ist auch $AC = ac$, der Winkel $A = a$ und $C = c$ *).

Um die Gleichheit dieser Dreyecke einzusehen, denke man sich das Dreyeck abc dergestalt auf das Dreyeck ABC gelegt, daß der Scheitel b auf B, und die Seite bc auf BC zu liegen kommen; so werden die Winkel B und b, die Geraden bc und BC, wie auch die Geraden ba und BA einander decken, weil sie vermöge der Voraussetzung einander gleich sind (§. 12). Da nun die Seiten bc und BC, wie auch ba und BA einander decken, so muß der Punct a auf A, der Punct c auf C fallen, und die Seiten ac und AC müssen sich decken, weil ihre Grenzen, das ist, ihre Endpuncte über einander fallen (§. 12); folglich ist die Seite $AC = ac$. Aus demselben Grunde des Deckens ist auch der Winkel $A = a$ und $C = c$.

---

*) In der Folge werden wir der bessern Übersicht, mithin der mehrern Deutlichkeit wegen, jederzeit die Voraussetzungen oberhalb eines Querstriches, und das, was zu beweisen ist, unterhalb desselben setzen.

Diese gering scheinende Ordnung wird dem Anfänger, der sich an solche gewöhnt, bey dem Studium der Geometrie sehr gute Dienste leisten. Jedoch dürfen diese Voraussetzungen nicht als willkührlich angesehen werden, sondern sie sind entweder schon früher erwiesene Lehrsätze oder Constructionen, die man nur wegen Zeitgewinn nicht wirklich ausführt, da der Erfolg der Schlüsse doch immer derselbe ist.

2) Wenn an zwey Dreyecken ABC und abc zwey Winkel mit der dazwischen liegenden Seite einzeln wechselweise gleich sind, so sind auch die übrigen Stücke derselben, folglich die Dreyecke selbst einander gleich; nämlich Fig. 9.

wenn $B = b$, $A = a$ und $AB = ab$ ist:

---

so ist auch $AC = ac$, $CB = cb$, und $C = c$.

Denn man lege in Gedanken das Dreyeck abc dergestalt auf das Dreyeck ABC, daß die gleichen Seiten ab und AB, die gleichen Winkel b und B, wie auch a und A einander decken; so wird die Seite ac auf AC und cb auf CB liegen, und der gemeinschaftliche Punct c der beyden Seiten ac und cb muß in den beyden Geraden AC und CB zugleich, nämlich auf ihrem Durchschnittspuncte oder Scheitel C anzutreffen seyn. Da nun der Punct c auf dem Puncte C liegt, so müssen die Seiten ac und AC, cb und CB, wie auch die Winkel c und C einander decken (§. 12); folglich ist die Seite $AC = ac$, $CB = cb$, und der Winkel $C = c$.

3) Wenn an zwey Dreyecken ABC und abc alle drey Seiten einzeln wechselweise gleich sind, so sind auch die Winkel, die den gleichen Seiten gegenüber stehen, einander, und folglich die zwey Dreyecke selbst gleich; sind nämlich die

Seiten $AB = ab$, $AC = ac$ und $CB = cb$,

---

so sind auch die Winkel $A = a$, $B = b$ und $C = c$.

Man beschreibe mit dem Halbmesser ac aus dem Puncte a einen Kreisbogen mn, und mit dem Halbmesser bc aus dem Puncte b den Kreisbogen pq; so durchschneiden sich diese zwey Bogen in dem Puncte c. Nun lege man in Gedanken das Dreyeck ABC dergestalt auf das Dreyeck abc, daß der Punct B auf b, A auf a und der Punct C in die Gegend von c hin zu liegen komme; so werden sich die Geraden ab und AB wegen ihrer Gleichheit decken (§. 12). Vermög der Voraussetzung ist auch $AC = ac$ und $CB = cb$, also muß der Endpunct C der geraden AC in dem Bogen mn, und derselbe Endpunct C der Seite BC auch in dem Bogen pq, also in beyden Bogen zugleich sich befinden; und weil diese Bogen sich nur in dem einzigen Puncte c durchschneiden: so muß auch der Durchschnitts-

Fig. 9. punct C der Seiten BC und AC mit dem Puncte c zusammenfallen; folglich müssen die Seiten bc und BC, so wie ac und AC, weil ihre Endpuncte über einander liegen, und auch die Winkel c und C, b und B, wie auch a und A einander decken: also ist der Winkel $A = a$, $B = b$ und $C = c$, und die zwey Dreyecke ABC und abc sind einander vollkommen gleich.

Aus diesen drey Haupteigenschaften der Dreyecke folgt nun, daß in vollkommen gleichen oder sich deckenden Dreyecken, den gleichen Seiten gleiche Winkel, und umgekehrt den gleichen Winkeln auch gleiche Seiten entgegen stehen.

§. 24.

Nach diesen vorausgeschickten allgemeinen, auf die geometrische Grundwahrheit sich stützenden Eigenschaften der Dreyecke können wir nun zu andern nützlichen Untersuchungen fortschreiten. Da von den stetigen Größen die Linie die einfachste ist, so geht man in der Geometrie von ihr aus, und schreitet nach und nach zu den Flächen und endlich zu den Körpern selbst. Die reine (Elementar-) Geometrie zerfällt demnach in drey Hauptstücke:

1) In die Lehre von den geraden Linien und dem Kreise.
2) In die Lehre von den Flächen, und
3) in die Lehre von den Körpern.

Das vierte Hauptstück dieser Schrift endlich handelt gleichfalls von Eigenschaften der Linien, vorzüglich von Dreyecken, für solche Fälle, wo die geometrische Construction wegen Unvollkommenheit unserer Sinne, unserer Instrumente ꝛc. nicht mehr genug Schärfe gibt; und man daher ihre Größe durch die schärfere Rechnung bestimmt, welche Lehre man vorzugsweise Dreyecklehre oder Trigonometrie nennt.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Erstes Hauptstück.

Von den verschiedenen Eigenschaften der geraden Linien, welche sie sowohl unter sich, als auch in- und außerhalb des Kreises haben.

Erster Abschnitt.

Von den Eigenschaften der geraden Linien in verschiedener Lage und Stellung unter sich.

I. Eigenschaften der senkrechten Linien.

§. 25.

Wenn eine Gerade *CE* auf eine andere Gerade *AB* dergestalt gezogen ist, daß sie mit derselben gleiche Nebenwinkel, d. i. beyder Seits rechte Winkel bildet: so sagt man, *CE* stehe auf *AB* senkrecht (perpendiculär). Verlängert man *CE*, so ist der Winkel *BED* $= AEC$, und $AED = CEB$ (§. 20), es entstehen dadurch nämlich vier rechte Winkel; daher steht sowohl die Gerade *DC* auf *AB*, als auch *AB* auf *CD* senkrecht. Wenn demnach eine gerade Linie auf eine andere Gerade senkrecht gezogen ist, so steht diese auch auf jener senkrecht. Fig. 10.

a) Um uns in den Voraussetzungen kurz ausdrücken zu können, werden wir meistens die senkrechte Stellung einer Geraden auf einer andern durch folgendes Zeichen $\perp$ bezeichnen: nämlich $CE \perp AB$ wird gelesen: *CE* ist senkrecht auf *AB*; $AB \perp DC$; u. s. w.

§. 26.

Die Eigenschaften der senkrechten Linien sind folgende:

1) Wenn zwey Puncte *C* und *D* einer Geraden *CD*

Bayerische Staatsbibliothek München

Fig. 10. von zwey Puncten *A* und *B* einer andern Geraden *AB* gleich weit entfernt sind, so steht erstere auf der letztern senkrecht; wenn nämlich

$DA = DB$ und $AC = CB$ ist,

so ist $CD \perp AB$.

Denn die zwey Dreyecke *DCA* und *DCB* haben die Gerade *DC* gemein, und vermög der Voraussetzung ist $AD = DB$ und $AC = CB$, also haben sie alle drey Seiten einzeln wechselweise gleich; daher sind die Dreyecke *DCA* und *DCB* selbst und auch die den gleichen Seiten *AD* und *DB* gegenüber stehenden Winkel *m* und *n* einander gleich (§. 23. 3.). Die zwey Dreyecke *ECA* und *ECB* haben die gerade *EC* gemein, mithin haben sie zwey Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel *m* und *n* wechselweise gleich; daher sind auch diese Dreyecke *ECA* und *ECB* einander gleich (§. 23. 1.). In vollkommen gleichen Dreyecken stehen den gleichen Seiten *AC* und *CB* auch gleiche Winkel *AEC* und *CEB* entgegen (§. 23. 3.); diese gleichen Winkel sind aber Nebenwinkel, es ist nämlich jeder ein rechter Winkel; daher steht *CE* in dem Puncte *E* auf *AB* senkrecht (§. 25.). Da nun alle Theile einer geraden Linie eine und dieselbe Richtung haben (§. 6.), so steht auch *DE* in dem Puncte *E* auf *AB* senkrecht (§. 25.); folglich steht die ganze Gerade *CD* auf *AB* senkrecht.

2) Eben so läßt sich dieses von jedem andern Puncte der Geraden *CD* erweisen. Sind nämlich beyde Puncte der Geraden *CD* z. B. *C* und *f*, jenseits der Geraden *AB*, und gleich weit von zwey Puncten *A* und *B* entfernt; so ist,

wenn $AC = CB$, und $Af = fB$ ist,

auch $CE \perp AB$.

Denn in diesem Falle haben die Dreyecke *fCA* und *fCB* alle drey Seiten wechselweise gleich, mithin ist $m = n$. Nun sind in den Dreyecken *ECA* und *ECB* wieder, wie oben in 1) zwey Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel wechselweise gleich, also decken sich diese Dreyecke, und es ist der Winkel $AEC = BEC$; folglich ist *CE* auf *AB* senkrecht.

3) Befindet sich einer von den zwey Puncten der Geraden *CE* in der Geraden *AB* selbst, z. B. in *E*, nämlich

ist $AE = EB$ und $AC = CB$,

so ist ebenfalls $CE \perp AB$.

Denn hier sind in den Dreyecken ECA und ECB alle drey Seiten wechselweise gleich, mithin sind in diesen gleichen Dreyecken die den gleichen Seiten AC und CB gegenüber stehenden Winkel AEC und BEC auch einander gleich, und weil diese Nebenwinkel sind, so hat jeder 90 Grade; folglich steht CE auf AB senkrecht. Fig. 10.

Wenn demnach was immer für zwey Puncte einer Geraden CD von zwey Puncten A und B einer andern Geraden AB gleich weit entfernt sind, so ist jeder Punct, z. B. C, f, E, ... oder D der Geraden CD von A eben so weit als von B der Geraden AB entfernt.

§. 27.

Umgekehrt, wenn eine gerade Linie CE auf einer andern AB senkrecht steht, und es ist ihr Durchschnittspunct E von zwey Puncten A und B der andern Geraden gleich weit entfernt: so ist jeder Punct der senkrechten CE von A eben so weit als von B entfernt; z. B. $AC = CB$, $Af = fB$ u. s. w.

Denn vermög der Voraussetzung ist CE auf AB senkrecht, also sind die zwey Winkel AEC und BEC jeder $= 90°$, überdieß haben die beyden Dreyecke ECA und ECB die Gerade EC gemein, mithin haben sie zwey Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel wechselweise gleich, daher decken sich diese Dreyecke; folglich ist die Seite $AC = CB$ (§. 23. 1.). Eben dieses läßt sich auch von f und jedem andern Puncte der Geraden CE erweisen.

§. 28.

Aus allen Geraden AE, Af, AD u. s. w, die aus einem Puncte A auf eine Gerade CD gezogen werden können, ist die senkrechte AE die kürzeste.

Es sey AE auf CD senkrecht, man verlängere diese Senkrechte AE, und mache $EB = AE$, ziehe sodann die Geraden Bf, BD, u. s. w.: so ist vermög des vorhergehenden Paragraphs $Af = fB$, $AD = BD$ rc., weil wegen der Voraussetzung $CD \perp AB$ ist, und $EB = AE$ gemacht wurde (§. 27.),

Nun aber ist $Af + fB > AB$ (§. 21.),

also auch $\frac{Af + fB}{2} > \frac{AB}{2}$ (Rk. 72. Grundsatz III.);

es ist nämlich $Af > AE$; weil $\frac{Af + fB}{2} = Af$, und $\frac{AB}{2} = AE$ ist.

Fig. 10. Da sich dieses auch von jeder andern Geraden AC, AD, u. s. w. erweisen läßt; so ist die Senkrechte aus allen Geraden die kürzeste Linie, die aus einem Puncte auf eine Gerade gezogen werden können: und da unter allen diesen Geraden nur eine einzige, nämlich die Senkrechte die kürzeste ist: so kann auch aus einem Puncte auf eine gerade Linie nur eine einzige Senkrechte gezogen werden.

Da man die Entfernungen der Gegenstände von einander durch die kürzeste Linie zwischen denselben anzugeben pflegt: so ist auch die Entfernung eines Punctes A von einer Geraden CD nichts anders, als die Senkrechte AE, die man aus jenem auf diese fällt.

§. 29.

Läßt sich ein Satz nicht unmittelbar aus der Natur der Sache selbst, d. i. direct wie bisher beweisen, so muß der Beweis indirect geführt werden (Nk. 17.). Hierbey sucht man alle denkbaren möglichen Fälle auf, nimmt jeden einzelnen Fall indessen als möglich an, und zeigt durch Anwendung schon erwiesener Sätze und richtiger Schlüsse entweder seine Möglichkeit oder Unmöglichkeit. Hat man auf diese Art die Unmöglichkeit aller Fälle bis auf Einen erwiesen, so ist derjenige Fall wahr und richtig, bey welchem sich kein Widerspruch dessen zeigt, was behauptet wird.

11. Dieß durch ein Beyspiel zu erläutern, behaupte Jemand, daß sich auf einer Geraden CD aus einem und demselben Puncte E nur eine einzige Senkrechte EA auf dieser Seite der Geraden CD errichten lasse; ein Anderer hingegen behaupte, daß nebst dieser Senkrechten EA aus demselben Puncte E noch eine Senkrechte EB auf der Geraden CD errichtet werden könne. Da hier nur die zwey Fälle: 1) daß entweder die zwey Geraden EA und EB in dem Punct E zugleich auf CD senkrecht stehen, oder 2) daß sie über einander fallen, und nur eine einzige Gerade ausmachen, möglich sind: so darf man nur die Unmöglichkeit oder Ungereimtheit des einen Falles zeigen, so muß der andere wahr und richtig seyn, weil alles dasjenige unumstößlich wahr ist, von welchem das Gegentheil unmöglich ist.

Denn nach der 1ten Behauptung ist $EA \perp CD$, daher $CEA = 90°$
„ „ 2ten „ soll auch $EB \perp CD$, daher $CEB = 90°$

also müßte auch $CEA = CEB$ seyn.

Es ist aber vermög Rk. 40. I. der Winkel $CEA = CEB + BEA$, Fig.
daher $CEB + BEA = CEB$ (Rk. 40. III.); 11.
nun aber ist $CEB = CEB$ (Rk. 40. II.),
folglich ist $BEA = 0$, vermög Rk. 54. I.

Da nun der Winkel BEA = Null ist, so muß die Gerade BE mit AE übereinfallen, und nur eine einzige Gerade ausmachen, wodurch zugleich die Unmöglichkeit der zweyten, hingegen die Richtigkeit der ersten Behauptung, und zwar indirect erwiesen ist.

Es ist demnach auf einer Geraden CD aus einem Puncte derselben, auf einer und derselben Seite nur eine einzige Senkrechte AE möglich. Wohl aber kann auf der andern Seite der Geraden CD aus dem nämlichen Puncte E gegen F noch eine Senkrechte EF auf CD errichtet werden, die aber mit der vorigen Senkrechten EA Eine Gerade FA bildet. (§. 25.) Wenn also zwey gerade Linien auf einer dritten Geraden in einem und demselben Puncte senkrecht stehen, so bilden sie nur eine einzige Gerade.

§. 30.

Läßt man was immer für einen schweren Körper a an einem Faden Aa frey hangen, bis er ruht: so heißt die Gerade Aa, welche der Faden vorstellet, oder welche mit der Richtung dieses freyhangenden Fadens übereinkommt, eine Vertikal-Linie; und jede Gerade CD, welche auf der Richtung einer Vertical-Linie Aa senkrecht steht, heißt eine Horizontal-Linie. Man sieht hieraus, daß eine senkrechte Linie wohl eine Vertikal- oder Horizontal-Linie vorstellen, aber nicht umgekehrt eine Horizontal- oder Vertikal-Linie jede senkrechte Linie vorstellen könne; weil von jenen zwey Linien jede ihre bestimmte Richtung hat; da hingegen eine senkrechte Linie was immer für eine Richtung EB in Hinsicht auf jene zwey Linien haben kann, wenn sie nur mit einer andern Geraden bc zwey gleiche Nebenwinkel $bEB = cEB$ bildet.

§. 31.

Zwey rechtwinkelige Dreyecke ABC und abc sind 12.
einander gleich, wenn sie die Hypothenusen BC und bc, nebst einer Kathete CA und ca wechselweise gleich haben.

Denn man denke das Dreyeck abc auf ABC so gelegt, daß der Punct b auf B, c auf C und a in die Gegend von A zu liegen

Fig. 12. komme, so werden sich die Hypothenusen *bc* und *BC*, weil sie gleich sind, decken. Da nun *CA* wegen des rechten Winkels bey *A* auf *AB*, und aus eben diesem Grunde *ca* auf *ab* senkrecht steht; aus einem und demselben Puncte aber nur eine einzige Senkrechte auf eine Gerade möglich ist (§. 28.): so müssen die Senkrechten *CA* und *ca* über einander fallen, und weil sie vermöge der Voraussetzung von gleicher Länge sind, einander decken. Da nun die Endpuncte der Katheten *ab* und *AB* über einander liegen, so müssen auch diese einander gleich seyn (§. 12.); folglich sind die zwey rechtwinkeligen Dreyecke *ABC* und *abc* selbst einander gleich.

Auf eben diese Art wird der Beweis geführt, wenn nebst den Hypothenusen *CB* und *cb* die andern Katheten *AB* und *ab* einander gleich sind.

13. a) Da man in der Ausübung auf dem Papiere die Senkrechten durch Hülfe eines hölzernen Dreyeckes gewöhnlich zu ziehen pflegt; so kommt es darauf an, ein solches Dreyeck vor dem Gebrauche zu prüfen, d. h. zu untersuchen, ob es genau rechtwinkelig sey. Es stelle z. B. *CEF* ein solches rechtwinkeliges Dreyeck vor, so untersucht man seine Richtigkeit, wenn man die eine Seite *CE* desselben, an eine gerade Linie *CD* oder an ein richtiges Lineal *AB* anlegt (§. 6. a), und längs der andern Seite eine Linie *FE* ziehet. Hierauf wendet man das Dreyeck dergestalt um, daß die Seite *CE* die Lage *ED* erhält, daß nämlich der Punct *C* auf *D* zu liegen kommt, der Punct *E* aber auf seiner Stelle liegen bleibt, und ziehet längs der Seite *FE* wieder eine Linie. Wenn nun die zwey gezogenen Linien einander decken, so bilden sie eine einzige Gerade (§. 6.), und das Dreyeck ist richtig; schließen sie hingegen einen Winkel ein, so ist das Dreyeck unrichtig, und muß durch gehöriges Abschleifen der zwey Katheten verbessert werden.

§. 32.

14. Die Eigenschaften der Senkrechten setzen uns in den Stand, folgende Aufgaben aufzulösen.

1. Aufgabe. Eine gegebene gerade Linie *CD* in zwey gleiche Theile zu theilen.

Auflösung. Dieses geschieht auf dem Papiere, wenn man aus dem Endpuncte *C* mit einem beliebigen Halbmesser (der aber nicht viel kleiner als *CD* seyn muß) *), Kreisbögen bey *F* und *G* beschreibt,

---

*) Bey diesen wie bey allen geometrischen Verzeichnungen oder Constructionen ist vorzüglich zu beachten, daß sich Linien nie schief, sondern wo möglich senkrecht, aber nie unter 45 Grad schneiden, weil sonst ihr Durchschnitt nicht genug scharf bestimmt ist.

sodann mit der nämlichen Eröffnung des Zirkels diese Kreisbogen aus dem andern Endpuncte D, durch andere zwey Kreisbögen in G und F schneidet, und endlich diese zwey Durchschnittspuncte mittelst einer Geraden GF verbindet; so wird die gegebene Gerade CD in dem Puncte E in zwey gleiche Theile getheilet seyn. Fig. 14.

Denn die Durchschnittspuncte G und F sind mit einerley Halbmesser bestimmt worden, also ist $CF = FD$, und $CG = GD$, daher FG auf CD in dem Puncte E senkrecht; folglich $CE = ED$ vermög §. 26. 1).

Wäre dießseits der Geraden CD nicht genug Raum den Durchschnittspunct G zu bestimmen, so mache man mit dem Halbmesser $CF = DF$ den Durschnitt in F, hierauf mit einem etwas kleinern Halbmesser $Cf = Df$ den Durchschnitt in f, und ziehe die Gerade FfE; so ist ebenfalls $CE = ED$ (§. 26. 2.).

a) Auf dem Felde wird eine gerade Linie CD in zwey gleiche Theile getheilt, wenn man die gerade Linie ausmißt (wie dieses wirklich geschieht, wird im practischen Theile umständlich gezeigt werden), und sodann die Hälfte dieses Maßes von einem Endpuncte z. B. von C gegen den andern D bis in E austrägt.

2. Aufgabe. Aus einem in einer Geraden AB gegebenen Puncte E eine Senkrechte zu errichten.

Auflösung. Auf dem Papiere schneide man $CE = ED$ ab, beschreibe mit einerley Halbmesser aus den Puncten C und D zwey Kreisbogen, die sich entweder dieß- oder jenseits der Geraden AB in G oder F schneiden, und ziehe durch G und E, oder durch F und E die Gerade FG; so ist sie in dem Puncte E senkrecht auf AB (vermög §. 26. 3.).

Soll aus dem Endpuncte E einer Geraden AE eine Senkrechte errichtet werden, so verlängert man, wenn es angeht, die Gerade AE um ein beliebiges Stück ED, und verfahre wie zuvor. Weiter unten wird für diesen Fall eine eigene Methode gezeigt werden.

b) Auf dem Felde trägt man ebenfalls aus dem gegebenen Puncte E rechts und links gleiches Maß, das ist, man macht $EC = ED$, bemerkt die Puncte C, E und D mit Pflöcken, befestiget in C und D die Ende einer Schnur oder Meßkette, nimmt diese in ihrer Mitte F und spannet sie zu beyden Seiten CF und FD gleichförmig an, bemerkt den Punct F auf der Erde mit einem Pflocke, spannet an die zwey Pflöcke E und F eine Schnur, und ziehet längs derselben, wenn es nöthig ist, eine seichte Vertiefung auf der Erde; so wird die Gerade FE in dem gegebenen Puncte E auf AB senkrecht stehen.

Fig. 14. 3. Aufgabe. Durch einen außer der Geraden *AB* gegebenen Punct *F* eine Senkrechte auf *AB* zu ziehen.

Auflösung. Man beschreibe aus dem gegebenen Puncte *F* einen Kreisbogen, welcher die Gerade *AB* in zwey Puncten *C* und *D* schneidet, aus den Puncten *D* und *C* beschreibe man mit einem beliebigen Halbmesser (der aber größer als *CE* oder *ED* seyn muß) zwey Kreisbogen, die sich auf dieser oder jener Seite der Geraden *AB* in *G* oder *f* schneiden, und ziehe sodann die Gerade *FG*; so wird sie senkrecht auf *AB* seyn. Denn *CF* und *FD* sind Halbmesser eines nämlichen Bogens, daher einander gleich; und weil ferner der Punct *f* mit gleichem Halbmesser $Cf = fD$, oder der Punct *G* mit den Halbmessern $CG = GD$ bestimmt wurde, so ist vermög §. 26. 1) und 2) *FG* auf *AB* senkrecht.

Auf ähnliche Weise verfährt man auch, wo es angeht, auf dem Felde; da sich aber diese Auflösung nicht jederzeit anwenden läßt: so wird weiter unten (§. 38.) eine andere Auflösungsart dieser Aufgabe gegeben werden.

c) Wenn in einer Geraden *AB* ein Punct *E* gegeben ist, aus welchem eine Senkrechte bestimmt werden soll, so pflegt man zu sagen: man habe die Senkrechte *EF* oder *EG* auf *AB* errichtet. Ist aber ein Punct *F* oder *G* außerhalb einer Geraden *AB* gegeben, und man soll eine Senkrechte auf die Gerade bestimmen, so sagt man: man habe eine Senkrechte *FE* oder *GE* auf *AB* fallen lassen, oder eine Senkrechte aus *F* oder *G* auf *AB* gefäll.

II. Eigenschaften der Parallel-Linien.

§. 33.

15. Zwey gerade Linien, die überall gleich weit von einander entfernt sind, wenn man sie auch in's Unendliche verlängert denkt, nennt man gleichlaufend oder parallel.

a) Der Kürze wegen werden wir in der Folge parallele Linie öfters mit dem Zeichen || bezeichnen, und es wird z. B. $AB \parallel CD$ gelesen: *AB* ist parallel zu *CD*. Sind zwey gerade Linien einander gleich und auch parallel, so wird dieses so bezeichnet $AB = \parallel CD$ und gelesen: *AB* ist gleich und parallel mit *CD*.

§. 34.

Zwey gerade Linien *AB* und *CD* sind durchaus gleichweit von einander entfernt oder haben gleiche Abstände, wenn nur zwey Puncte *A* und *B* der einen

Geraden von zwey Puncten C und D der andern gleich weit entfernt sind. Fig. 15

Denkt man sich die Gerade AB um die zwey Puncte A und B drehend, so wird dieselbe während der Drehung ihre Lage nicht verändern, also auch keinen Raum beschreiben (§. 6.); folglich kann sich kein Punct derselben gegen die andere Gerade CD weder mehr annähern, noch sich mehr von ihr entfernen, sondern es behalten alle Puncte dieselbe Entfernung, welche A und B dieser Geraden, in Bezug auf die andere Gerade CD haben. Da sich dieses auch von allen Puncten der Geraden CD in Bezug auf jene Gerade AB sagen läßt: so folgt, daß zwey gerade Linien durchaus gleiche Abstände haben, wenn nur zwey Puncte der einen Geraden von zwey Puncten der andern gleich weit entfernt sind. Zwey solche gerade Linien sind demnach gleichlaufend oder parallel (§. 33).

Da die Entfernungen der Puncte einer Geraden von einer andern Geraden diejenigen Senkrechten sind, welche von den Puncten der einen Geraden auf die andere gezogen werden (§. 28); so folgt, daß zwischen zwey Parallelen AB und CD alle Senkrechten AC, pH, Gy, u. s. w., einander gleich sind, sie mögen aus was immer für Puncten der Geraden AB auf CD, oder umgekehrt aus was immer für Puncten der Linie CD auf AB gezogen werden.

§. 35.

Wenn zwey parallele gerade Linien AB und CD von einer dritten Geraden EF geschnitten werden: so entstehen bey jedem Durchschnitte vier Winkel q, p, r, n und m, s, y, x, deren Eigenschaften aus §. 20. schon bekannt sind. Von diesen acht Winkeln liegen vier außerhalb, wie p, q, x, y; und vier innerhalb der Parallelen, wie s, m, n, r.

Aus diesen acht Winkeln liegen vier dießseits der Durchschnittslinie, als q, r, m, y; und vier jenseits derselben, als x, s, n, p. Die Winkel, welche auf der entgegengesetzten Seite der Durchschnittslinie von dieser und den zwey Parallelen eingeschlossen sind, heißen Wechselwinkel, und zwar sind m und n, so wie s und r innere, dagegen aber q und x, so wie y und p äußere Wechselwinkel.

Die Winkel q und m heißen ein äußerer und ein innerer Winkel an der nämlichen Seite (d. i. auf einerley Seite der Durchschnittslinie und der Parallelen liegend). Eben so sind

Fig. 15. x und n, dann y und r, wie auch p und s ein äußerer und ein innerer Winkel an einerley Seite. Die Winkel m und r sind zwey innere, x und p aber zwey äußere Winkel an der nämlichen Seite u. s. w.

§. 36.

Die Eigenschaften zweyer Parallelen $A\,B$ und $C\,D$, wenn sie von einer dritten Geraden $E\,F$ geschnitten werden, sind folgende:

1) Die Wechselwinkel m und n, wie auch r und s sind einander gleich.

Denn man ziehe aus dem Durchschnittspuncte p die Senkrechte $p\,H$ auf $C\,D$, und aus y die Senkrechte $y\,G$ auf $A\,B$, so haben die rechtwinkeligen Dreyecke $G\,y\,p$ und $H\,y\,p$ die Hypothenuse $y\,p$ gemein, und eine Kathete $G\,y$ und $p\,H$ wechselweise gleich (§. 34); folglich sind diese Dreyecke einander gleich (§. 31.), und es ist der Winkel $m = n$ (§. 23. 3.).

Da die Winkel $n + r = 180°$
und auch $m + s = 180°$ sind } (§. 19.);

so ist auch $m + s = n + r$ (Rk. 40. Grunds. III.).

Vermög Vorigem ist $m = n$

folglich auch $s = r$ (Rk. 54. Grunds. I.).

Ist demnach einer aus den Wechselwinkeln, zum Beyspiel t (wenn die Parallelen $A\,B$ und $C\,D$ von der Geraden $B\,D$ geschnitten werden) ein rechter Winkel, so muß auch der andere z ein rechter Winkel seyn; folglich muß jede Gerade $B\,D$, wenn sie auf einer der Parallelen $C\,D$ senkrecht ist, auch auf der andern $A\,B$ senkrecht stehen, das heißt: wenn eine Gerade auf einer von zwey oder mehrern Parallelen senkrecht steht; so steht sie auch senkrecht auf allen andern.

2) Ein äußerer und ein innerer Winkel auf einer und derselben Seite sind einander gleich, nämlich $q = m$, $y = r$, $p = s$, u. s. w.

Denn es ist $q = n$ (§. 20.),
und auch $m = n$, vermög des Vorigen,

folglich $q = m$ (Rk. 40. Grunds. III.)

Desgleichen ist $y = s$, und $r = s$; also auch $y = r$ u. s. w.

3) Zwey innere Winkel auf einerley Seiten enthalten zusammen 180°, oder sind zwey rechten Winkeln gleich.

Denn es ist $n + r = 180^\circ$ Fig. 15.

und $m = n$

folglich auch $m + r = 180^\circ$ (Rk. 40. II.)

Eben so findet man, daß $q = x$, $y = p$, $n + s = 180^\circ$ ist, u. s. f. Es sind demnach vier und vier Winkel einander gleich; ist Einer derselben bekannt, so sind es auch zugleich die übrigen sieben.

Alles dieses findet auch Statt, wenn drey, vier, oder mehre gerade parallele Linien von einer geraden Linie geschnitten werden.

§. 37.

Umgekehrt, wenn zwey gerade Linien AB und CD von einer dritten EF dergestalt geschnitten werden, daß 16.

1) entweder die Wechselwinkel, z. B. $m = n$, oder
2) ein äußerer und ein innerer Winkel auf einerley Seite einander gleich sind; oder endlich
3) daß zwey innere auf einerley Seite liegende Winkel zusammen 180° enthalten; so sind die zwey Geraden AB und CD parallel.

1) Es sey z. B. $m = n$, nämlich $AEF = m$. Wäre nun AB nicht parallel zu CD, so könne durch den Punct E eine andere Gerade ab zu CD parallel gezogen werden,

und da wäre $aEF = m$, vermöge (§. 36. 1.);

nun aber ist $AEF = m$, vermöge der Voraussetzung;

also wäre auch $aEF = AEF$;

es ist aber der Winkel $aEF = aEA + AEF$ (Rk. 40. I.),

mithin auch $aEA + AEF = AEF$ (Rk. 40. III.),

und davon $AEF = AEF$;

folglich $aEA = 0$, welches ungereimt und unmöglich ist (§. 29.); also kann nebst der Geraden AB durch den Durchschnittspunct E keine, was immer für eine andere Gerade ab zu CD parallel gezogen werden. Wenn demnach $m = n$ ist, so ist AB parallel zu CD.

2) Ist $v = m$, so ist wegen $v = n$, auch $m = n$ (Rk. 40. III.); und folglich wegen 1) die Gerade $AB \parallel CD$.

3) Ist endlich $n + w = 180^\circ$, so ist wegen $m + w = 180^\circ$, auch $n + w = m + w$, und $n = m$; folglich ist wegen 1) $AB \parallel CD$.

Fig. 16. Nun können wir daraus folgern, daß zu einer Geraden *CD* durch einen und denselben Punct *E* der Geraden *FE* nur eine einzige Parallele gezogen werden kann. Immerhin aber kann durch irgend einen andern Punct der Geraden *FE*, z. B. durch *p* noch eine andere Gerade, die auch nebst *AB* mit *CD* parallel ist, gezogen werden.

a) Aus den Eigenschaften der Parallelen folgt nun auch, daß zwey Winkel, deren Schenkel wechselweise parallel laufen, einander gleich sind. Anfänger können den Beweis hierüber selbst leicht führen, wenn sie sich die nöthige Figur dazu entwerfen, die Scheitelpuncte der zwey Winkel durch eine Gerade verbinden, nöthigen Falls verlängern, und endlich nach den bereits bekannten Gründen schließen.

§. 38.

Aufgabe. Es ist eine Gerade *CD* und außerhalb derselben ein Punct *E* gegeben, man soll durch diesen Punct zu der gegebenen Geraden eine Parallele ziehen.

1. Auflösung. Sowohl auf dem Papier als auf dem Felde fälle man aus dem gegebenen Puncte *E* eine Senkrechte *EH* auf *CD*, und in einem willkührlichen Punct *C* errichte man eine andere Senkrechte *CA* auf *CD*, mache $CA = EH$, und ziehe durch die beyden Puncte *A* und *E* eine Gerade *AB*; so wird sie zu *CD* parallel seyn (§. 34.).

2. Oder: Man ziehe durch den gegebenen Punct *E* und einen andern beliebigen Punct *F* eine Gerade *EF*, mache den Winkel $n = m$ nach §. 17., und ziehe durch die Puncte *q* und *E* eine Gerade *AB*; so ist sie parallel zu *CD*, vermög §. 37. 1.).

In der Ausübung ist es sehr bequem auf dem Papiere die Parallelen durch Hülfe zweyer hölzernen Dreyecke, oder auch vermittelst eines solchen Dreyeckes und eines Lineales zu ziehen; nur müssen sie vorher nach §. 6 und §. 31 berichtiget werden.

3) Und nun können wir auch auf dem Felde durch einen außerhalb einer Geraden *CD* gegebenen Punct *E* eine Senkrechte *EH* auf *CD* ziehen, wenn wir durch Hülfe der Wechselwinkel die Lage der Parallele *AB* wie vorhin bestimmen, und sodann aus dem Puncte *E* eine Senkrechte *EH* auf *AB* nach §. 32 in 3.) fällen; so wird die Linie *EH* auch auf *CE* senkrecht seyn, weil sie auf der Parallelen *AB* senkrecht ist (§. 36. 1.).

Im practischen Theile dieses Buches wird von der Ziehung paralleler Linien auf dem Felde ausführlich gehandelt werden.

Zweyter Abschnitt.

Von Eigenschaften der geraden Linien, sowohl innerhalb als außerhalb des Kreises.

§. 39.

Wenn eine Sehne AB von einer Geraden CD geschnitten wird, und es finden zwey von den folgenden vier Bedingungen Statt: Fig. 17.

1) Daß CD durch den Mittelpunct gehe;

2) Daß CD auf der Sehne AB senkrecht stehe;

3) Daß die Gerade CD die Sehne AD in zwey gleiche Theile, und

4) endlich, daß sie den Bogen ADB, oder den Winkel AMB in zwey gleiche Theile theilt; so sind jederzeit auch die übrigen zwey Bedingungen wahr und richtig.

Zu 1) und 2). Es sey CD durch den Mittelpunct gezogen, und stehe auf AB senkrecht; so ist $AE = EB$, und der Bogen $ApD = DqB$ oder der Winkel $m = n$.

Denn man ziehe die Halbmesser AM und MB, so sind die rechtwinkeligen Dreyecke EMA und EMB, welche die Kathete EM gemein, und die Hypothenuse AM und MB gleich haben, einander gleich (§. 31.); daher ist $AE = EB$, und $m = n$ (§. 23. 3.), folglich auch der Bogen $ApD = DqB$; weil diese das Maß jener Winkel sind (§. 16.).

Zu 2) und 3). Es sey $CD \perp AB$, und $AE = EB$,

so geht CD durch den Mittelpunct, und es ist $m = n$.

Man verbinde die Endpuncte der Geraden DC mit den Endpuncten der Sehne AB, so entstehen die rechtwinkeligen Dreyecke $ECA = ECB$, und $EDA = EDB$. Denn die rechtwinkeligen Dreyecke ECA und ECB decken sich wegen der gemeinschaftlichen Seite EC, und ihrer vorausgesetzten senkrechten Stellung auf AB und wegen $AE = EB$; also ist die Seite $AC = CB$ (§. 23. 1.), und da sie Sehnen eines Kreises sind, so ist auch der Bogen $AFC = CGB$ (§. 13. 3.). Aus gleichem Grunde decken sich die Dreyecke EDA und EDB; also ist auch der Bogen

$$ApD = DqB$$

und vermög Vorigen ist $AFC = BGC$

so ist auch $ApD + AFC = DqB + BGC$ (Rk. 47. I.);

es ist nämlich $DAFC = DBGC$ (Rk. 40. Grundſ. I.);

Fig. und weil diese zwey gleiche Bogen den ganzen Umkreis ausmachen, so
17. ist jeder davon die Hälfte, daher ist die Gerade DC ein Durchmesser (§. 13. 5.); und geht folglich durch den Mittelpunct.

Zu 3) und 1). Es sey CD durch M gezogen, und $AE = EB$:

so ist $CD \perp AB$, und $m = n$ oder $ApD = DqB$.

Denn in diesem Falle sind in den Dreyecken EMA und EMB alle drey Seiten wechselweise gleich, daher decken sich diese Dreyecke; folglich ist der Winkel $m = n$, und $AEM = MEB$ (§. 23. 3.), und da die letztern zwey gleichen Winkel Nebenwinkel sind; so ist $CD \perp AB$ (§. 25.) u. s. w.

a) Es sind aus diesen vier Bedingungen zu je zwey verbunden, sechs verschiedene Fälle möglich.

§. 40.

Diese Eigenschaften setzen uns in den Stand, folgende Aufgaben zu lösen.

18. 1. Aufgabe. Durch drey Puncte A, B, C, die nicht in gerader Linie liegen, einen Kreis zu führen.

Auflösung. Man verbinde zwey und zwey zunächst liegende Puncte durch gerade Linien AB und BC, theile jede derselben durch die Senkrechten EF und GD nach §. 32. 1. in zwey gleiche Theile; so wird der gemeinschaftliche Durchschnittspunct M dieser zwey Senkrechten der Mittelpunct des gesuchten Kreises seyn, der durch die gegebenen Puncte A, B und C zu ziehen ist.

Denn AB und BC sind als Sehnen zu betrachten, welche durch die Senkrechten EF und GD in zwey gleiche Theile getheilt sind; daher geht jede derselben durch den Mittelpunct (§. 39. 2.). Nun aber ist nur der Punct M so beschaffen, daß beyde Senkrechten durch denselben gehen, und da sich diese geraden Linien EF und GD nur in dem einzigen Puncte M durchschneiden (§. 7. in 3.); so muß dieser der Mittelpunct des gesuchten Kreises seyn.

a) Weil zwey gerade Linien, die sich durchschneiden, nur einen einzigen Punct gemein haben, nämlich sich nur in einem einzigen Puncte schneiden; so kann auch durch drey Puncte, die nicht in gerader Linie liegen, nur ein einziger Kreis geführt werden. Liegen hingegen drey gegebene Puncte in einer geraden Linie, so ist es für sich klar, daß die darauf errichteten Senkrechten sich nie durchschneiden können, weil sie mit einander parallel laufen (§. 36. 3).

2. Aufgabe. Den Mittelpunct eines Kreisbogens, oder auch eines ganzen Kreises zu finden.

Auflösung. Man nehme in dem Bogen drey beliebige Puncte an, verbinde zwey und zwey neben liegende mit einander durch Sehnen, theile jede derselben durch eine Senkrechte in zwey gleiche Theile; so wird dadurch der Mittelpunct wie in der vorigen Aufgabe bestimmt. Fig. 18.

Zu einem ganzen Kreise kann der Mittelpunct auf folgende Art gefunden werden. Man ziehe durch zwey willkürliche Puncte des Umkreises eine Sehne, theile sie durch eine Senkrechte in zwey gleiche Theile; so ist diese Senkrechte der Durchmesser, und in ihm liegt der zu suchende Mittelpunct. Nun darf man nur den Durchmesser nach §. 32. 1. halbiren, so hat man den Mittelpunct des gegebenen Kreises bestimmt.

3. Aufgabe. Einen Winkel *ACB* in zwey gleiche Theile zu theilen. 19.

Auflösung. Man beschreibe mit einem beliebigen Halbmesser aus der Spitze des gegebenen Winkels zwischen seinen Schenkeln einen Bogen *ADB*; aus den Puncten *A* und *B* beschreibe man wieder mit einem beliebigen aber gleichen Halbmesser Kreisbogen, die sich in *E* durchschneiden, und ziehe die Gerade *EC*; so theilet diese den Winkel *ACB*, wie auch den Bogen *ADB* in zwey gleiche Theile.

Denn die Dreyecke *ECA* und *ECB* haben alle drey Seiten wechselweise gleich, sie decken sich also; folglich ist der Winkel $ACE = BCE$ (§. 23. 3.). Der Winkel *ACB* oder Bogen *ADB* wird auch in zwey gleiche Theile getheilet, wenn man seine Sehne *AB* durch die Senkrechte *EF* halbiret, und diese bis in den Scheitel *C* verlängert. Da der Winkel *DCB* oder der Bogen *DB* auf diese Weise wieder in zwey gleiche Theile getheilt werden kann; so folgt, daß man jeden Winkel, oder jeden gegebenen Kreisbogen in 2, 4, 8, 16, 32, 64 . . . gleiche Theile zertheilen könne. Wäre hingegen ein Bogen in 3, 5, 7 . . . gleiche Theile zu theilen, so kann dieses nach den bisherigen Gründen nicht anders, als durch das Versuchen (tentando) geschehen.

§. 41.

Eine gerade Linie *AB*, die in der Ebene der Kreisfläche an dem Umfange desselben dergestalt gezogen ist, daß sie mit diesem nur einen einzigen Punct *D* gemein hat, übrigens aber beyder Seits ganz außer der Kreisfläche liegt, wird eine Tangente (Berührungslinie), und der Punct *D* der Berührungspunct genennt. 20.

§. 42.

Fig. 20. 1) Wenn auf dem äußersten Puncte *D* eines Halbmessers *MD* eine Senkrechte *AB* errichtet wird, so ist diese eine Tangente des Umkreises.

Denn jeder Punct *B* oder *A* . . . . dieser Senkrechten ist vom Mittelpunct *M* weiter als der Punct *D* entfernt (§. 28). Nun aber ist *D* der Endpunct des Halbmessers *MD*, d. i. der äußerste Punct des Umkreises, daher liegt jeder andere Punct dieser Geraden außerhalb des Kreises; folglich ist diese Senkrechte *AB* eine Tangente des Umkreises vermög §. 41. Es kann daher durch einen gegebenen Punct des Umkreises leicht eine Tangente gezogen werden, wenn man einen Halbmesser *MD* verlängert, und auf dieser Geraden *MC* in dem Endpuncte *D* des Halbmessers eine Senkrechte errichtet (§. 32. 2.).

2) Umgekehrt, wenn man bey einer schon gezogenen Tangente den Berührungspunct *D* mit dem Mittelpuncte des Kreises durch eine Gerade verbindet, so stehet diese senkrecht auf der Tangente.

Denn vermög der vorigen Eigenschaft der Tangente ist jeder Punct *A* oder *B* . . . . derselben weiter als der Berührungspunct *D* von dem Mittelpuncte *M* entfernt, daher ist der Halbmesser *MD* die kürzeste Linie unter allen, die aus *M* auf die Gerade *AB* gezogen werden können; folglich steht jene auf dieser senkrecht vermög §. 28. Bey einer schon gezogenen Tangente wird demnach der Berührungspunct leicht gefunden, wenn man aus dem Mittelpuncte eine Senkrechte auf die Tangente zieht (§. 32. 3).

§. 43.

21. 1. Aufgabe. Aus einem außer dem Kreise gegebenen Puncte *A* eine Tangente zu ziehen.

Auflösung. Mit der Entfernung des gegebenen Punctes vom Mittelpuncte des Kreises, nämlich mit dem Halbmesser *AM* beschreibe man einen Kreisbogen *MGC*, und aus dem Mittelpuncte *M* durchschneide man mit dem Durchmesser des gegebenen Kreises, d. i. mit einem Halbmesser $ED = 2MD$ den Kreisbogen in *C*; diesen Durchschnittspunct *C* und den Mittelpunct *M* verbinde man durch die Gerade *MC*, endlich ziehe man durch den auf diese Art gefundenen Durchschnittspunct *B* des Umkreises, und durch den gegebenen Punct *A*, die Gerade *AB*: so wird diese in dem Puncte *B* den gegebenen Kreis berühren.

Denn es ist $MA = AC$, weil der Bogen MGC mit dem Fig.
Halbmesser MA beschrieben wurde; auch ist $MB = BC$, weil man 21.
$MC = ED = 2MB$ gemacht hat; daher steht die Gerade AB in dem Puncte B auf MC senkrecht (§. 26. 3); folglich ist AB eine Tangente (§. 42. 1).

2. Aufgabe. Zu einer gegebenen Geraden fh in einer beliebigen Entfernung eine Parallele zu führen. 15.

Auflösung. Man beschreibe mit einem Halbmesser von unbestimmter Länge aus einem beliebigen Puncte f der gegebenen Geraden einen Kreisbogen g, und mit eben diesem Halbmesser aus einem andern willkührlichen Puncte h einen andern Kreisbogen i, verbinde die äußersten oder höchsten Puncte g und i dieser Bogen durch eine Gerade gi; so ist diese mit der gegebenen fh gleichlaufend, vermög der Eigenschaft der Tangente.

Ist nebst der Geraden fh auch ein Punct g gegeben, durch welchen eine Parallele geführt werden soll, so setze man die eine Zirkelspitze in diesen Punct g, und eröffne den Zirkel so weit, bis die andere Spitze mittelst eines Bogens die gegebene Gerade berührt. Mit dieser Eröffnung des Zirkels, als mit einem Halbmesser gf, beschreibe man aus irgend einem Puncte h der gegebenen Geraden einen Bogen i, und verbinde seinen höchsten Punct mit dem gegebenen Puncte g durch eine Gerade; so läuft diese mit jener parallel.

a) Die Ziehung der Parallelen vermittelst Tangenten findet in der Ausübung vielfältige und sehr vortheilhafte Anwendung.

§. 44.

Ein Winkel $m = ABC$, welcher am Umfange eines Kreises von einer Tangente AB, und von einer Sehne BC eingeschlossen ist, hat die Hälfte des Bogens CFB zu seinem Maße, welchen die Sehne vom Kreise abschneidet; es ist nämlich $m = \frac{1}{2} BFC$. 22.

Um dieses zu beweisen, ziehe man den Durchmesser ED mit der Sehne BC parallel, und den Durchmesser FG senkrecht auf diese Sehne, sodann ziehe man auch an den Berührungspunct B den Halbmesser BM;

so ist $m + x = 90°$ (vermöge §. 42. 2.)
und auch $n + y = 90°$ vermög Construction;

daher $n + y = m + x$ (Rk. 40. Grunds. III.)

Fig. 22. Nun ist $y = x$ (§. 36. vermög 1.),

mithin $n = m$ vermög (Rk. 54. Grundf. I.),
es ist auch $n = FB = \frac{1}{2} CFB$ (§. 16. und 39. 1.);

folglich ist $m = \frac{1}{2} CFB$.

Eben so ist auch der Winkel $HBC = \frac{1}{2} CDGEB$.

Denn es ist $m + CBH = 180°$ (§. 19.), und auch die Bogen $\frac{1}{2} CFB + \frac{1}{2} BGC = 180°$ (§. 14. und Rk. 72. I.),

daher auch $m + CBH = \frac{1}{2} CFB + \frac{1}{2} BGC$;
nun aber ist $m = \frac{1}{2} CFB$ vermöge des Vorhergehenden;

folglich auch $CBH = \frac{1}{2} BGC$.

§. 45.

23. Ein Winkel m, der von zwey Sehnen AC und BC eines Kreises gebildet ist, und sein Scheitel C im Umkreise desselben liegt, heißt ein **Umkreis-Winkel**, und **hat zu seinem Maße den halben Bogen, welchen seine Schenkel vom Kreise einschließen**; es ist nämlich $m = \frac{1}{2} AB$.

Denn man ziehe durch den Scheitel C des Winkels die Tangente DE (§. 42. 1.); so ist $n + m + p = 180°$ (§. 19.);
es ist aber auch $\frac{1}{2} CFA + \frac{1}{2} AB + \frac{1}{2} BGC = 180°$;

daher $n + m + p = \frac{1}{2} CFA + \frac{1}{2} AB + \frac{1}{2} BGC$.
Nun ist $n = \frac{1}{2} CFA$ und $p = \frac{1}{2} BGC$ (§. 44.);

folglich ist auch $m = \frac{1}{2} AB$ (Rk. 54. Grundf. I.).

Daraus können folgende Schlüsse abgeleitet werden:

1) **Jeder Umkreis-Winkel ist die Hälfte seines correspondirenden Mittelpuncts-Winkels.**

Denn es ist $AMB = AB$ (§. 16.),
also auch $\frac{1}{2} AMB = \frac{1}{2} AB$ (Rk. 72. Grundf. I.),
nun ist aber $m = \frac{1}{2} AB$ (§. 45.);

folglich ist auch $m = \frac{1}{2} AMB$.

24. 2) **Alle Umkreis-Winkel $D, E, F \ldots$, die auf einem und demselben Bogen ACB stehen, sind einander gleich.**

Denn jeder derselben hat zu seinem Maße die Hälfte des Bogens ACB, vermöge des Vorigen.

3) Jeder Umkreis-Winkel $C, D, E \ldots$, der mit seinen Schenkeln auf den Endpuncten des Durchmessers steht, ist ein rechter Winkel. Fig. 25.

Denn er hat zu seinem Maße die Hälfte des halben Umkreises, nämlich $\frac{1}{2}$ von 180°, also 90 Grade.

4) Von vier in einem Kreise liegenden und zusammenhängenden Umfangs-Winkeln enthalten jede zwey gegenüber stehende zusammen 180°; es sind nämlich $m + n = 180°$ und auch $x + y = 180°$. 26.

Denn es ist $m = \frac{1}{2} DCB$
und $n = \frac{1}{2} DKB$:

daher auch $m + n = \frac{1}{2} DCB + \frac{1}{2} DKB$
oder $m + n = \frac{1}{2} DCBKD = \frac{1}{2}$ von $360° = 180°$.

5) Zwey parallele Sehnen AB und EF schließen gleiche Bogen ein.

Denn man ziehe nur die Gerade EB;
so ist $a = b$, (vermöge §. 36. 1.);
nun ist aber $a = \frac{1}{2} AE$
und $b = \frac{1}{2} BF$;

folglich auch $\frac{1}{2} AE = \frac{1}{2} BF$
oder $AE = BF$ (Rk. 63. Grundſ. I.).

6) Umgekehrt, wenn die eingeschlossenen Bogen AE und BF einander gleich sind, so sind die Sehnen AB und EF parallel.

Denn in diesem Falle in $AE = BF$, vermög Voraussetzung,
oder $\frac{1}{2} AE = \frac{1}{2} BF$ (Rk. 72. Grundſ. I.);
es ist aber $\frac{1}{2} AE = a$
und $\frac{1}{2} BF = b$ } §. 45.);

folglich ist auch $a = b$. Da nun a und b Wechselwinkel sind, so ist $AB \parallel EF$. (vermög §. 37. 1.).

7) Eben so schließen eine Tangente GH und eine parallele Sehne EF gleiche Bogen EK und FK ein; und umgekehrt, wenn die eingeschlossenen Bogen EK und KF gleich sind, so ist die Sehne FE mit der Tangente GH parallel.

Denn im ersten Falle sind die Wechselwinkel p und q einander gleich; es ist aber $q = \frac{1}{2} FK$ (§. 44.), und $p = \frac{1}{2} EK$ (§. 45.);

Fig. 26. folglich $\frac{1}{2}FK = \frac{1}{2}EK$ oder $FK = EK$. Im zweyten Falle sind die Wechselwinkel p und q einander gleich, daher ist EF mit GH parallel.

§. 46.

27. Aufgabe. An dem Endpuncte B einer Geraden AB eine Senkrechte BC zu errichten, wenn die Verlängerung der Geraden AB über den Punct B hinaus wegen eines Hindernisses nicht möglich ist.

Auflösung. Man wähle auf derjenigen Seite der gegebenen Geraden, auf welcher die Senkrechte errichtet werden soll, einen beliebigen Punct M, beschreibe mit der Entfernung dieses Punctes von dem gegebenen Endpuncte, nämlich mit MB einen Kreisbogen, der die Gerade AB in irgend einem Puncte D schneidet, verbinde diesen mit dem gewählten Puncte M, verlängere die Verbindungs-Linie DM, bis der Kreisbogen in einem Puncte C geschnitten wird, und verbinde endlich diesen Durchschnittspunct mit dem gegebenen Endpuncte B; so ist $CB \perp AB$.

Denn man kann M als den Mittelpunct, und DC als den Durchmesser des Kreisbogens DBC betrachten; nun stehen die Schenkel DB und BC des Umkreis-Winkels DBC auf den Endpuncten des Durchmessers, daher ist der Winkel $DBC = 90°$ (§. 45. 3.), folglich CB auf AB senkrecht.

a) Auf dem Felde nimmt man eine Schnur oder Meßkette in ihrer Mitte zusammen, befestiget das eine Ende derselben an einem Pflocke in B, und die Mitte mit einem Pflocke in einem beliebigen Puncte in der Gegend bey M; jedoch muß hierbey die halbe Kette oder Schnur BM gut ausgespannt werden. Hierauf durchschneidet man mit einem, durch das andere Ende gesteckten Pflocke bey gleichförmiger Ausspannung der andern halben Kette MD die gegebene Linie AB in dem Puncte D, und befestiget dasselbe allda durch den Pflock D. Nun nimmt man jedes Mahl dasjenige Ende der Meßkette, welches an demjenigen Endpuncte der Linie befestiget ist, in welchem die Senkrechte errichtet werden soll, und geht damit so herum, daß die Kette in eine gerade Linie ausgespannt wird; mit dem Bemerken jedoch, daß dieselbe genau an dem Pflocke M anliege, und bezeichnet den Punct C auf der Erde; spannet endlich von da die Schnur bis an B: so wird CB in dem Puncte B auf AB senkrecht stehen.

Dritter Abschnitt.

Von den Eigenschaften der geraden Linien, wenn sie eine ebene Fläche einschließen, oder von den Umfängen der Vielecke.

I. Von den Vielecken überhaupt.

§. 47.

Eine jede von geraden Linien eingeschlossene ebene Fläche heißt ein Vieleck (Polygon), jede einschließende Linie eine Seite, und alle Seiten zusammen werden der Umfang des Vieleckes genennt. Jeder Winkel am Umfange eines Vieleckes, der von zwey Seiten eingeschlossen ist, heißt ein Vielecks-Winkel oder Polygon-Winkel. Ein ausgehender Winkel, wie *m*, ist derjenige, dessen Schenkel und Spitze auswärts; ein eingehender aber, wie *n*, dessen Schenkel und Spitze einwärts gekehrt sind. Diese sind jederzeit $> 180°$, jene aber $< 180°$. Eine gerade Linie von einem Vielecks-Winkel zu einem andern über die Fläche des Vielecks gezogen, heißt eine Diagonale, als *AD*, *FC*, *BE* (Fig. 28); desgleichen *AC*, *AD*, *AE*, *AF* (Fig. 29.). Fig. 28. 29.

Jedes Vieleck hat eben so viele Vielecks-Winkel, als es einschließende Seiten enthält. Ein Vieleck, welches drey Seiten oder Winkel enthält, heißt insbesondere ein Dreyeck; ein Viereck, wenn es von vier; ein Fünfeck, wenn es von fünf Seiten eingeschlossen ist, u. s. w.

§. 48.

Wenn in einem Vierecke jede zwey gegenüber stehende Seiten parallel sind, so heißt dasselbe überhaupt ein Parallelogramm (wie Fig. 30. bis 33.). Aus den verschiedenen Lagen und Größen der Seiten und Winkel entstehen verschiedene Parallelogramme. Ein Parallelogramm von gleichen Seiten und Winkeln wird insbesondere ein Quadrat (Fig. 30.); ein Parallelogramm von gleichen Winkeln 30.
und ungleichen Seiten ein Rechteck, wie *ABCD* (Fig. 31.); 31.
ein Parallelogramm von gleichen Seiten und ungleichen Winkeln ein Rhombus oder eine Raute (Fig. 32.); ein Parallelogramm 32.
endlich von ungleichen Seiten und Winkeln wird ein Rhomboid oder eine längliche Raute genennt, wie *ABDC* (Fig. 33.). 33.

Fig. Ein Viereck, in welchem nur zwey gegenüber stehende Seiten
34. parallel sind, heißt ein Trapez, wie *ABDC* (Fig. 34.); stehen
die zwey parallelen Seiten senkrecht auf einer der Verbindungslinien,
so heißt dasselbe ein rechtwinkeliges Trapez, wie Fig. 77; ein
Viereck hingegen, in welchem keine Seite mit der gegenüber stehen-
35. den parallel ist, heißt ein Trapezoid, wie *ABCD* (Fig. 35.).
Ein Trapez kann erforderlichen Falls leicht zu einem Parallelogramm ergänzt werden, wenn man die kürzere parallele Seite *AB* des Trapez verlängert, und durch den gegenüber stehenden Endpunct *D* der anliegenden schiefen Seite *BD* zu der andern schiefen Seite *AC* des Trapez eine Parallele *Dm* führt.

§. 49.

Zieht man in einem Dreyecke aus der Spitze eines beliebigen
Winkels eine Senkrechte auf die gegenüber liegende Seite oder ihre
Verlängerung, so heißt jene Senkrechte die Höhe, und diese Seite
36. die Grundlinie des Dreyeckes. So z. B. ist *BE* die Höhe und
AC die Grundlinie; oder wenn *AB* die Grundlinie des Dreyeckes
ABC ist, so ist *CD* die Höhe desselben.

Die Höhe eines Parallelogramm ist diejenige Senkrechte, die
man aus einem beliebigen Puncte einer Seite auf die gegenüber lie-
gende oder ihre Verlängerung fället; und eine von diesen zwey Sei-
ten heißt die Grundlinie des Parallelogramm. Es ist z. B. *EF*
32. die Höhe, und *DC* oder *AB* die Grundlinie des Parallelogramm
ABCD (Fig. 32.).

Fällt man in einem Trapez aus einem beliebigen Puncte einer
der zwey parallelen Seiten, eine Senkrechte auf die gegenüber ste-
hende Seite oder ihre Verlängerung: so heißt diese Senkrechte *An*
34. der Abstand der zwey gleichlaufenden Seiten, oder die Höhe
des Trapez.

§. 50.

Die Vielecke werden überhaupt eingetheilt in regelmäßige, unregelmäßige und in symmetrische. Ein Vieleck wird regelmäßig genennt, wenn in demselben alle Seiten und Winkel am Umfange einander gleich sind (Fig. 29. und 30.); hieraus folgt von selbst, welche Vielecke unregelmäßig sind. Symmetrisch werden die Vielecke genennt, wenn sie von einer geraden Anzahl Seiten eingeschlossen, deren jede zwey gegenüber stehende einander gleich und parallel sind (Fig. 28. und 30. bis 33.).

II. Eigenschaften der Dreyecke.

§. 51.

Jedes Dreyeck enthält, ohne seine Fläche in Erwägung zu ziehen, sechs Stücke, nämlich drey Seiten und drey Winkel. Sind aus diesen sechs Stücken Fig. 34.

1) zwey Seiten nebst dem eingeschlossenen Winkel, oder
2) zwey Winkel nebst der dazwischen liegenden Seite, oder
3) alle drey Seiten, oder endlich
4) zwey Seiten nebst einem anliegenden rechten oder stumpfen Winkel gegeben: so ist dadurch das Dreyeck jedes Mahl bestimmt, und es können die übrigen drey Stücke durch die Verzeichnung auf folgende Art gefunden werden.

Nach 1) findet man die drey übrigen Stücke eines Dreyeckes, wenn man den gegebenen Winkel *B* vermittelst eines Transporteurs, 9.
oder besser durch Hülfe eines Sehnen-Maßstabes, der an seinem Orte beschrieben und sein Gebrauch erklärt werden wird, auf dem Papier nach §. 17. verzeichnet, sodann aus der Spitze *B* die gegebenen Seiten *BA* und *BC* aufträgt, und endlich die Puncte *C* und *A* durch eine Gerade verbindet.

Wenn man nach 2) an den Endpuncten der gegebenen Geraden *AB* die gegebenen Winkel verzeichnet, so werden die Schenkel *Ag* und *Bh* genugsam verlängert, sich in einem Puncte *C* schneiden, und die übrigen drey Stücke bestimmt seyn.

Sind nach 3) alle drey Seiten gegeben, so ziehe man eine Gerade *ab* (Fig. 9.), und trage eine von den gegebenen Seiten von *a* nach *b*; mit einer andern Seite beschreibe man aus *a* den Bogen *mn*, und diesen Bogen durchschneide man mit der dritten Seite aus *b*: so ist das Dreyeck *abc*, und folglich auch die drey Winkel desselben bestimmt.

Nach 4) findet man die übrigen drey Stücke, wenn man einen rechten Winkel *CAB* (Fig. 12.) verzeichnet, und auf einen Schen- 12.
kel die anliegende gegebene Seite z. B. *AB* aufträgt, sodann mit der andern gegebenen Seite aus dem Puncte *B* den andern Schenkel *AC* durchschneidet. Ist anstatt des rechten Winkels ein stumpfer oder spitziger gegeben, so verfährt man nach eben dieser Weise.

§. 52.

Durch zwey gegebene Seiten und einen anliegenden spitzigen Winkel aber wird ein Dreyeck, welches keinen rechten Winkel enthält,

Fig. nur dann hinlänglich bestimmt, wenn die dem gegebenen spitzigen Winkel gegenüber liegende Seite größer als die gegebene anliegende ist; im entgegengesetzten Falle hingegen lassen sich jederzeit zwey verschiedene Dreyecke verzeichnen, wovon jedes die gegebenen drey Stücke
37. in sich faßt. Sind z. B. die Längen der Seiten AC und CB nebst dem anliegenden spitzigen Winkel m gegeben, und man hat nach dem Vorhergehenden (§. 51. 4.) das Dreyeck ABC verzeichnet; so läßt sich kein Dreyeck mehr angeben, welches die gegebenen drey Stücke enthält.

Denn ist $AC > CB$, und man beschreibt mit dem Halbmesser AC einen Bogen, bis die Verlängerung von AB bey D durchschnitten wird; so entstehet das Dreyeck BCD, welches zwar die gegebenen zwey Seiten CB und $AB = CD$, aber nicht auch den gegebenen Winkel m in sich faßt. Ist hingegen AC und CB nebst dem anliegenden Winkel n gegeben, und man beschreibt mit dem Halbmesser CB einen Bogen, der die Gerade AB in E schneidet; so entstehet noch ein Dreyeck ACE, welches auch die gegebenen drey Stücke so wie das Dreyeck ABC enthält, aber von diesem sehr verschieden ist.

Durch drey gegebene Winkel endlich wird ein Dreyeck nie bestimmt, weil es unzählige gleichwinkelige Dreyecke, z. B. CDE,
41. CAB, Cgh u. s. w. gibt, die alle in Hinsicht auf ihre Seiten von einander sehr verschieden sind; es muß also bey den drey Stücken, wodurch ein Dreyeck bestimmt wird, wenigstens Eine Seite gegeben seyn.

§. 53.

In jedem Dreyecke ist die Summe aller drey Winkel = 180°, oder zwey rechten Winkeln gleich.

38. Denn man ziehe zu einer beliebigen Seite AB des Dreyeckes durch die Spitze C des gegenüber liegenden Winkels eine Parallele DE;

so ist $m + x + p = 180°$ (§. 19.)
es ist aber $m = n$ und $p = q$ (§. 36. 1),

also auch $n + x + q = 180°$ (Rk. 40. Grundſ. II.)

Hieraus folgt:

1) Daß ein Dreyeck nicht mehr als nur Einen rechten, und um so mehr auch nur einen einzigen stumpfen Winkel enthalten kann; in jedem Falle aber müssen die übrigen zwey Winkel spitzig seyn.
2) In einem rechtwinkeligen Dreyecke müssen die spitzigen Winkel zusammen 90° enthalten; ist demnach Einer von diesen bekannt,

z. B. $= 30°$, so ist auch der zweyte bestimmt und $= 60°$, weil Fig.
$90° - 30° = 60°$ ist. 38.

3) Wenn in einem Dreyecke zwey Winkel gegeben sind, so ist dadurch auch der dritte bestimmt; es sey z. B. $n = 40°$ und $q = 65°$; so ist $x = 180° - (40 + 65) = 180° - 105° = 75°$.

4) Wenn man in einem Dreyecke ABC aus der Spitze eines 36.
Winkels B auf die gegenüber liegende Seite AC eine Senkrechte (die Höhe) BE zieht, so fällt diese **in** das Dreyeck, wenn die an der Grundlinie anliegenden Winkel m und n spitzig sind; hingegen liegt die Senkrechte oder Höhe CD ganz **außer** dem Dreyecke, wenn einer von den an der Grundlinie AB anliegenden Winkeln p stumpf ist, und zwar: liegt sie auf derjenigen Seite desselben, wo der stumpfe Winkel sich befindet.

Denn würde in dem letzten Falle die Senkrechte in das Dreyeck, etwa in die Lage Cd fallen, so müßte das Dreyeck CdB einen rechten Winkel CdB und einen stumpfen dBC enthalten, welches aber wegen 1) nicht möglich ist; es muß also, wenn p ein stumpfer Winkel ist, die Senkrechte CD **außer** dem Dreyecke liegen, weil hiervon das Gegentheil unmöglich ist (§. 29.).

Eben so kann man erweisen, daß die Senkrechte BE **in** das Dreyeck fallen müsse, wenn beyde Winkel m und n an der Grundlinie spitzig sind, daher weder mit der einen oder der andern Seite überein fallen könne.

5) Die Winkel von zwey solchen Dreyecken, die eine gemeinschaft- 35.
liche Seite haben und zusammen ein Viereck bilden, enthalten zusammen 2 Mahl 180 oder 360 Grade.

$$\left.\begin{array}{r}\text{Denn es ist } a + b + c = 180° \\ \text{und auch } d + e + f = 180°\end{array}\right\}\ \text{§. 53.}$$

$$\text{folglich } (a+d) + b + (c+e) + f = 360° \text{ (Rk. 47. I.).}$$

§. 54.

Wenn man bey einem Dreyecke ABC eine belie- 36.
bige Seite AB verlängert, so ist der dadurch entstehende äußere Winkel q des Dreyeckes, der Summe der zwey gegenüber stehenden Winkel im Dreyecke gleich; es ist nämlich $q = m + n$.

Fig. 36.

Denn es ist $m + p + n = 180°$, (§. 53.)
und auch $p + q = 180°$, (§. 19.)

daher auch $p + q = m + p + n$
daraus folgt endlich $q = m + n$.

§. 55.

39. 1) In jedem Dreyecke steht einem größern Winkel auch eine größere Seite, einem kleinern Winkel eine kleinere Seite entgegen, und umgekehrt;

wenn nämlich der Winkel $A > B$ ist;

so ist auch die Seite $CB > AC$.

Denn man denke um das Dreyeck ABC einen Kreis beschrieben (§. 40. 1.), so sind A und B Umkreiswinkel; und

daher $A = \frac{1}{2} CmB$
und $B = \frac{1}{2} CtA$ } (§. 45.)
da aber $A > B$ ist;

so ist auch $\frac{1}{2} CmB > \frac{1}{2} CtA$, (Rk. 40. Grundſ. II.)
oder $CmB > CtA$, (Rk. 63. Grundſ. II.)

Nun aber sind die Seiten CB und AC als Sehnen von diesen Bögen zu betrachten; folglich ist auch $CB > AC$ (§. 13. 4.).

2) Und umgekehrt, wenn die Seite $AB > CB$ ist;

so ist der Winkel $C < A$.

Denn AB als Sehne betrachtet, schneidet einen größern Bogen als die Sehne CB ab;

also ist der Bogen $ADB > CmB$, (§. 13. 4.),
oder $\frac{1}{2} ADB > \frac{1}{2} CmB$ (Rk. 72. II.)
nun aber ist $\frac{1}{2} ADB = C$
und $\frac{1}{2} CmB = A$ } (§. 45.);

folglich ist auch der Winkel $C > A$ vermöge Rk. 40. II.

§. 56.

Aus diesem ziehen wir folgende Schlüsse:

1) In jedem Dreyecke sind den gleichen Winkeln auch gleiche Seiten entgegengesetzt, und umgekehrt.

Denn es sey der Winkel $A = B$ Fig.

so ist auch $\frac{1}{2}\, CmB = \frac{1}{2} AtC$, (§. 45.)

oder $CmB = AtC$,

folglich ist auch die Sehne oder Seite $CB = AC$ (§. 13. 3.); und so auch umgekehrt.

2) Ein gleichseitiges Dreyeck ist auch gleichwinkelig, und folglich regelmäßig (§. 50.); denn jeder Winkel desselben enthält $\frac{180}{3} = 60°$.

Daher kann auf einer gegebenen Geraden ein regelmäßiges oder gleichseitiges Dreyeck leicht verzeichnet werden: wenn man aus den Endpuncten der gegebenen Linie AB mit einem Halbmesser, der dieser Geraden gleich ist, zwey Kreisbogen beschreibt, und ihren Durchschnittspunct C mit den Endpuncten der gegebenen Geraden durch zwey gerade Linien verbindet. 40.

a) Auch kann dadurch ein Winkel von 60 Graden leicht verzeichnet, und durch die Halbirung ein Winkel von 30 und 15 Grade, und ferner durch die Addition ein Winkel von 90, 75 und 45 Graden leicht gefolgert werden (§. 53. und 40. 3.).

3) In einem gleichschenkeligen Dreyecke sind die Winkel, welche den gleichen Schenkeln gegenüber stehen, einander gleich, und beyde spitzig. Und umgekehrt, wenn in einem Dreyecke zwey Winkel einander gleich sind, so ist dasselbe gleichschenkelig. Wenn daher in einem solchen Dreyecke Ein Winkel bekannt ist, so sind die übrigen zwey auch bekannt.

§. 57.

Wird in einem gleichschenkeligen Dreyecke aus der Spitze des Winkels, den die gleichen Schenkel einschließen, auf die gegenüberliegende Seite eine Gerade gezogen, und es findet Eine von folgenden drey Bedingungen Statt:

1) Wenn der Winkel, den die gleichen Schenkel einschließen, halbirt oder

2) die gegenüber liegende Seite in zwey gleiche Theile getheilt ist, oder wenn

3) diese Gerade auf der gegenüber liegenden Seite senkrecht steht; so müssen jederzeit auch die übrigen zwey Bedingungen wahr und richtig seyn.

Und umgekehrt, wenn aus diesen drey Bedingungen zwey

Fig. Statt finden; so ist das Dreyeck gleichschenkelig. Die hierzu nöthige Figur und die Beweise hierüber, kann ein Anfänger nach den bisher gegebenen Gründen selbst leicht entwerfen und ausführen.

III. Von der Ähnlichkeit der Dreyecke.

§. 58.

Alle Dinge, die auf einerley Art erzeugt oder bestimmt sind, auch gleiche innere Eigenschaften haben, und nur in Hinsicht auf ihre wirkliche Größe von einander unterscheidbar sind, d. h. solche Dinge, die nur in ihren innern Merkmahlen übereinstimmen, in den äußern aber verschieden sind, heißen ähnlich (Rk. 2.). Sind demnach die Winkel eines Dreyeckes, als die innern Merkmahle, den Winkeln eines andern Dreyeckes wechselweise gleich, die Seiten, als äußere Merkmahle, mögen wie immer verschieden seyn; so heißen solche Dreyecke ähnlich. Diejenigen Seiten, welche in ähnlichen Dreyecken wechselweise gleichen Winkeln gegenüber liegen, heißen gleichliegende Seiten.

41. a) Das Zeichen, wodurch wir die Ähnlichkeit der Dreyecke in der Folge bezeichnen werden, ist $\backsim$; es wird nämlich $ABC \backsim abc$ gelesen: das Dreyeck ABC ist ähnlich abc.

§. 59.

Zwey Dreyecke sind ähnlich, wenn sie zwey Winkel wechselweise gleich haben; es müssen also auch die dritten Winkel der Dreyecke einander gleich seyn;

wenn nämlich der Winkel $A = a$, und $B = b$ ist

so muß auch der Winkel $C = c$ seyn.

Denn es ist $A + B + C = 180°$
und $a + b + c = 180°$ } (§. 53);

daher $A + B + C = a + b + c$.

Es ist aber $A = a$
und $B = b$ } vermöge Voraussetzung;

also auch $C = c$ (Rk. 54. Grunds. I.),

folglich ist das Dreyeck $ABC \backsim abc$ vermög §. 58.

Haben zwey ähnliche Dreyecke überdieß auch eine Seite gleich, so decken sich solche Dreyecke und sind einander gleich (vermög §. 23. 2). Jede zwey Dreyecke, die sich decken, sind also auch zugleich ähnlich.

§. 60.

Wenn bey zwey Dreyecken ABC und abc die Fig. 42.
Seiten des einen Dreyeckes oder deren Verlängerungen, auf den Seiten des andern Dreyeckes oder auf ihren Verlängerungen wechselweise senkrecht stehen, so sind diese Dreyecke einander ähnlich, d. i. die Winkel des einen sind den Winkeln des andern Dreyeckes einzeln wechselweise gleich.

Es sey $ab \perp AB$, die Seite $ac \perp AC$, und die Verlängerung bD der Seite bc senkrecht auf BC;

so ist $n + p = 90°$, vermöge Voraussetzung,
und $m + n = 90°$, wegen $E = 90°$ und §. 53. 2)

also auch $m + n = n + p$
woraus $m = p$ folgt.

Ferner ist in dem Vierecke $abDB$ die Summe der Winkel
$r + s + t + u = 360°$ (§. 53. 5.)

Da aber $r = 90°$
und auch $t = 90°$ ist } vermöge Voraussf.

so verbleibt für $s + u = 180°$;
nun sind auch $u + v = 180°$ (§. 19.)

also $s + u = u + v$
daraus folgt $s = v$.

Da nun zwey Winkel m und s des Dreyeckes ABC wechselweise gleich sind zwey Winkeln p und v des andern Dreyeckes abc; so sind auch die dritten Winkel c und C einander gleich (§. 59.); folglich ist das Dreyeck $ABC \sim abc$ (§. 58.)

§. 61.

1) Zwey rechtwinkelige Dreyecke ABC und CDE sind einander ähnlich, wenn ihre Hypothenusen oder 43.
deren Verlängerungen auf einander senkrecht stehen, und die Katheten wechselweise mit einander parallel laufen.

Fig. Es sey $AC \perp CE$, $BC \parallel ED$, wie auch $CD \parallel AB$;

so ist $m + x = 90°$ (§. 36. 3 und 1.)

und auch $n + x = 90°$ vermög Voraussetzung;

daher $m + x = n + x$

und $m = n$. Da nun vermög Voraussetzung

$B = D = 90°$ ist;

so sind auch die dritten Winkel A und E einander gleich;

folglich ist $ABC \sim CDE$.

44. 2) **Zwey rechtwinkelige Dreyecke ABC und CDE sind auch einander ähnlich, wenn ihre Hypothenusen in Einer geraden Linie liegen, und ihre Katheten wechselweise parallel laufen.**

Es sey $AB \parallel CD$, $BC \parallel DE$ und AE eine gerade Linie;

so ist $A = m$ und $n = E$ } vermöge §. 36. 2.)

und $B = D = 90°$, vermöge der Voraussetzung;

folglich ist $ABC \sim CDE$.

3) **Zwey rechtwinkelige Dreyecke sind auch ähnlich, wenn sie noch einen von den spitzigen Winkeln wechselweise gleich oder gemeinschaftlich haben.**

Denn in diesem Falle haben sie zwey Winkel wechselweise gleich, folglich sind sie vermög §. 59. ähnlich.

§. 62.

45. **Wenn man in einem rechtwinkeligen Dreyecke aus der Spitze des rechten Winkels auf die Hypothenuse eine Senkrechte zieht; so theilet diese das gegebene Dreyeck in zwey kleinere, welche sowohl dem gegebenen, als auch unter sich ähnlich sind;**

wenn nämlich $x + n = 90°$, und $CD \perp AB$ ist;

so ist das Dreyeck $ADC \sim ACB$, $DCB \sim ACB$, $ADC \sim DCB$.

Denn vermöge der Voraussetzung ist in den Dreyecken ADC und ACB der Winkel $p = x + n = 90°$, der Winkel m ist beyden Dreyecken gemein; folglich ist auch $x = y$, und $ADC \sim ACB$ (§. 61. 3.).

Ferner ist in den Dreyecken DCB und ACB der Winkel $q = n + x = 90°$, und y beyden Dreyecken gemein, daher ist auch $m = n$; folglich $DCB \sim ACB$.

Da nun in den zwey Dreyecken ADC und DCB, nebst Fig.
$p = q$ auch $m = n$, und $x = y$ ist; so ist auch $ADC \sim DCB$.

§. 63.

1) Zwey gleichschenkelige Dreyecke sind ähnlich, 41.
wenn sie noch was immer für einen Winkel gleich haben.

Es sey $AB = BC$ und $ab = bc$, so sind die Winkel $A = C$ und $a = c$, vermöge §. 56. 3). Haben nun diese Dreyecke den von den gleichen Schenkeln eingeschlossenen Winkel gleich, nämlich $B = b$, so sind $A + C = a + c$ (§. 53, und Rk. 54. I.)

und $A + A = a + a$, (Rk. 40. Grundſ. II.)

oder $2\,A = 2\,a$

oder $A = a$; folglich ist

das Dreyeck $ABC \sim abc$, vermög §. 58.

Sind zwey von jenen Winkeln gleich, welche an den gleichen Schenkeln anliegen, z. B. $A = a$, so ist auch $C = c$ (§. 56. 3); folglich ist auch in diesem Falle das Dreyeck $ABC \sim abc$.

2) Umgekehrt, wenn von zwey ähnlichen Dreyecken eines gleichschenkelig ist, so ist es auch das andere.

Denn bey ähnlichen Dreyecken sind die Winkel einzeln wechselweise einander gleich (§. 58.); da nun das eine Dreyeck, z. B. ABC gleichschenkelig ist, so sind die den gleichen Schenkeln AB und BC gegenüber liegenden Winkel A und C einander gleich (§. 56. 3.); es müssen also auch im andern ähnlichen Dreyecke zwey gleiche Winkel vorkommen, folglich ist auch dieses Dreyeck abc gleichschenkelig.

§. 64.

1) Wenn bey zwey Dreyecken abc und ABC alle drey Seiten wechselweise mit einander parallel laufen, so sind die Dreyecke ähnlich; wenn nämlich

$$AB \parallel ab,\ BC \parallel bc \text{ und } AC \parallel ac \text{ ist,}$$

$$\text{so ist das Dreyeck } ABC \sim abc.$$

Denn man verlängere bey einem Dreyecke eine Seite, z. B. ab, bis zwey Seiten des andern Dreyeckes AC und BC (oder ihre Verlängerungen) geschnitten werden;

Fig. 41.

so ist $a = g$ und $b = h$ ⎫
wie auch $g = A$ und $h = B$ ⎭ (§. 36. 2.)

daher auch $a = A$ und $b = B$;
folglich ist $ABC \sim abc$, vermöge §. 59.

2) Umgekehrt, wenn bey zwey ähnlichen Dreyecken abc und ABC eine Seite des einen Dreyeckes mit der gleichliegenden Seite (§. 58.) des andern Dreyeckes parallel ist, so sind auch die übrigen gleichliegenden Seiten der Dreyecke mit einander parallel; wenn nämlich der Winkel $b = B$, $a = A$, $c = C$, und ab mit AB parallel läuft; so ist auch $AC \parallel ac$, und $BC \parallel bc$.

Denn man verlängere die parallele Seite ab des einen Dreyeckes, bis die zwey Seiten oder ihre Verlängerungen des andern Dreyeckes geschnitten werden,

so ist $g = A$ ⎫
und auch $a = A$ ⎭ vermög Voraussetzung und §. 36. 2.)

daher auch $a = g$; folglich ist ac parallel mit gC oder AC vermöge §. 37. 2.). Auf eben diese Art kann man zeigen, daß auch bc parallel mit BC ist.

§. 65.

1) Wenn man in einem Dreyecke ABC zu einer Seite AB eine Parallele DE führt, so sind die dadurch entstehenden zwey Dreyecke CDE und CAB einander ähnlich.

Denn der Winkel bey C ist beyden Dreyecken gemein; ferner ist der Winkel $x = A$ und $y = B$ (§. 36. 2.); es sind also in diesen Dreyecken alle drey Winkel einzeln wechselweise gleich; folglich das Dreyeck $CDE \sim CAB$ (§. 59.).

2) Umgekehrt, wenn zwey ähnliche Dreyecke CAB und CDE einen Winkel gemein haben, und gehörig über einander gelegt gedacht werden, so laufen die dritten Seiten, welche dem gemeinschaftlichen Winkel gegenüber liegen, mit einander parallel.

Denn vermöge der Voraussetzung ist der Winkel $B = y$ oder $A = x$; folglich ist DE mit AB parallel (§. 37. 2.).

IV. Eigenschaften der symetrischen Vierecke.

§. 66.

1) Wenn in einem Vierecke jede zwey gegenüber liegende Seiten mit einander parallel laufen, so sind sie auch einander gleich; Fig. 33.

wenn nämlich $AB \parallel CD$, und $AC \parallel DB$ ist,

so ist auch $AB = CD$, und $AC = DB$.

Denn man ziehe die Diagonale CB, so ist in den Dreyecken BCD und BCA der Winkel $m = n$, $p = q$ (§. 36. 1.), und $CB = CB$, daher decken sich diese Dreyecke (§. 23. 2.); folglich ist $AB = CD$ und $AC = DB$.

2) Umgekehrt, wenn in einem Vierecke jede zwey gegenüber liegende Seiten einander gleich sind, so sind sie auch parallel.

Denn in diesem Falle haben die Dreyecke BCD und BCA alle drey Seiten einzeln wechselweise gleich, daher decken sich diese Dreyecke, und es ist $m = n$ so wie $p = q$ (§. 23. 3.); folglich ist $AC \parallel BD$ und $AB \parallel CD$ (§. 37. 1.), und es ist das gegebene Viereck ein Parallelogramm §. 48. Daraus folgt auch, daß alle parallele Linien zwischen zwey Parallelen einander gleich sind.

§. 67.

Wenn in einem Vierecke nur zwey gegenüber liegende Seiten einander gleich, und nebst diesem auch parallel sind, so sind auch die andern gegenüber liegenden zwey Seiten gleich und parallel;

wenn nämlich $AB = \parallel CD$ ist,

so ist auch $AC = \parallel BD$

Denn in den Dreyecken BCD und BCA ist die Seite CB gemeinschaftlich, $AB = CD$ und der Winkel $p = q$, also decken sich diese Dreyecke (§. 23. 1.); folglich ist auch $AC = DB$, der Winkel $m = n$, und $AC \parallel DB$; und das gegebene Viereck ein Parallelogramm (§. 48.)

Es folgt daraus:

1) Daß jedes Parallelogramm mittelst einer Diagonalen AD oder CB in zwey gleiche Dreyecke getheilt wird. Deswegen ist jedes

Fig. 33. Dreyeck ADC die Hälfte eines Parallelogramm $ABDC$ von einerley Grundlinie CD und Höhe AE; man kann daher jedes Dreyeck DBC zu einem Parallelogramm ergänzen, wenn man durch die Endpuncte C und B einer beliebigen Seite zu den gegenüber liegenden Seiten des Dreyeckes Parallele CA und AB führt.

2) In jedem Parallelogramm sind jede zwey gegenüber liegende Winkel einander gleich, ist daher einer davon bekannt, so sind es auch die übrigen drey. Auch sind jede zwey an Einer Seite liegende Winkel zusammen 180° gleich.

§. 68.

Jede der zwey Diagonalen AD und CB eines Parallelogramm wird in dem gemeinschaftlichen Durchschnittspuncte M in zwey gleiche Theile getheilt.

Denn es sind die Winkel $r = s$, $m = n$ und die Seite $AC = DB$ (§. 48. und 66.), also sind die Dreyecke AMC und BMD selbst gleich (§. 23. 2.); folglich ist $CM = MB$, und $AM = MD$.

31. Ist das Parallelogramm ein Rechteck, wie $ABCD$, so sind die vier halben Diagonalen einander gleich, nämlich $MA = MB = MC = MD$.

Denn vermög §. 48 sind alle Winkel und die gegenüber liegenden Seiten eines Rechteckes einander gleich, also ist der Winkel $DAB = ABC$, die Seite $AD = BC$, und da nebstbey die Seite AB den beyden Dreyecken ABC und ABD gemeinschaftlich ist, so decken sich diese (§. 23. 1.); folglich ist $AC = DB$. Da nun diese Diagonalen in ihrem Durchschnittspuncte in zwey gleiche Theile getheilt sind, so ist auch $\frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} DB$, oder $MA = MB = MC = MD$.

a) Es kann demnach auf einer viereckigen Fläche, z. B. auf einem Bogen Papier $abcd$ sehr leicht ein Rechteck von unbestimmter Größe verzeichnet werden, wenn man die Diagonalen db und ac zieht, hierauf aus dem Durchschnittspuncte M gleiche Entfernungen $MA = MB = MC = MD$ auf diese Diagonalen trägt. und endlich die Puncte A, B, C, D mit geraden Linien verbindet.

§. 69.

30. und 31. Jeder Winkel in einem Rechtecke, so wie auch in einem Quadrate, ist ein rechter Winkel.

Denn alle vier Winkel enthalten zusammen 360°, vermög

(§. 53. 5.), sie sind aber einander gleich vermög §. 48; folglich ist Fig.
jeder $= \frac{360}{4} = 90°$. 31.

Es kann daher um jedes Rechteck und um jedes Quadrat aus dem Durchschnittspuncte der Diagonalen ein Kreis geführt werden, in welchem alle Scheitel ihrer Winkel liegen, weil jede Diagonale ein Durchmesser und jeder rechte Winkel derselben ein Umkreiswinkel ist (§. 45. 3.).

a) Auf einer gegebenen geraden Linie *AB* kann leicht ein Quadrat oder regelmäßiges Viereck verzeichnet werden, wenn man an den Endpuncten *A* und *B* senkrechte Linien errichtet, jede derselben der gegebenen Geraden *AB* gleich macht, und endlich die dadurch bestimmten Puncte *C* und *D* mit einer Geraden verbindet.

b) Eben so leicht kann aus zwey gegebenen Linien *DC* und *ef* ein Rechteck von bestimmter Größe verzeichnet werden, wenn man an den Endpuncten der Geraden *DC* senkrechte Linien errichtet (§. 46.), auf jede derselben die zweyte gegebene Gerade *ef* von *D* bis *A* und von *C* bis *B* aufträgt, und endlich die auf diese Art bestimmten zwey Puncte *A* und *B* mit einer Geraden verbindet. Weiter unten folgt hierüber eine noch einfachere und daher noch schärfere Construction.

§. 70.

Jede gerade Linie *PQ*, welche in was immer für
einer Richtung durch den Durchschnittspunct *M* der 33.
Diagonalen eines Parallelogramm gezogen wird, theilt sowohl sich selbst, als auch das Parallelogramm in zwey gleiche Theile.

Denn es ist das Dreyeck $MQA = MPD$ (§. 23. 2.); folglich ist $PM = MQ$. Ferner ist das Dreyeck $CMP = BMQ$, und $QMA = PMD$ vermög §. 23. 1), und das Dreyeck $AMC = BMD$ vermög §. 68; also sind die Dreyecke dießseits der Geraden *PQ* wechselweise gleich den Dreyecken jenseits derselben; folglich ist der Theil $PCAQ = QBDP$.

Ein Punct in einer ebenen Figur von der Eigenschaft, daß sowohl jede, nach einer beliebigen Richtung durch ihn gezogene Gerade, als auch die Figur selbst in zwey gleiche Theile getheilt wird, heißt in der Geometrie der Mittelpunct der Größe dieser Figur. Einen solchen Mittelpunct haben nicht nur die Parallelogramme, sondern auch alle symetrischen Vielecke (Fig. 28.) und der Kreis. Daß

Fig. aber die unsymetrischen Vielecke, wenn sie auch regelmäßig sind, keinen Mittelpunct der Größe haben, erhellet bey einigem Nachdenken von selbst.

V. Eigenschaften der übrigen Vielecke.

§. 71.

Alle Polygon-Winkel (Vieleckswinkel) eines jeden Vieleckes, dieses möge bloß ausgehende, oder auch
28. eingehende Winkel haben (Fig. 28.), enthalten zusammen so viel Mahl 180°, als dasselbe Seiten oder Winkel hat, weniger 360°.

Man nehme in der Mitte des Vieleckes nach Belieben einen Punct M an, und ziehe daraus in alle Vieleckswinkel gerade Linien; so entstehen dadurch so viele Dreyecke, als das Vieleck Seiten oder Winkel hat. Nun enthält jedes Dreyeck 180°; folglich enthalten alle Dreyecke zusammen so viel Mahl 180°, als es Seiten oder Vieleckswinkel gibt. Die Winkel aber, welche um den Punct M liegen, sind $= 360°$ (§. 19.), gehören aber nicht zu den Vieleckswinkeln, sie müssen daher von der Summe aller Winkel der Dreyecke abgezogen werden, um die Summe aller Vieleckswinkel zu erhalten; folglich ist die Summe aller Polygonwinkel eines Vieleckes so viel Mahl 180° gleich, als das Vieleck Seiten oder Winkel hat, weniger 360°. Da z. B. das Vieleck Fig. 28, sechs Seiten oder Winkel enthält, so haben alle Vieleckswinkel zusammen $6 . 180° - 360° = 720$. Hat demnach ein Vieleck n Seiten oder Winkel, so enthalten alle Vieleckswinkel zusammen $n . 180° - 360° = n . 180° - 2 . 180° = 180° (n - 2)$. Aus diesem folgt:

46. 1) Daß an jedem Vielecke, welches keine eingehenden Winkel hat, alle äußern Winkel, welche durch die Verlängerung der Seiten entstehen, zusammen 360° haben.

Man bezeichne der Kürze wegen die Summe aller innern Winkel $A + B + C + \ldots$ mit S, die Summe der äußern $a + b + c + \ldots$ aber mit x, und die Anzahl der Seiten des Vieleckes mit n;

$$\text{so ist } \left.\begin{aligned} A + a &= 180° \\ B + b &= 180° \\ C + c &= 180° \\ &\text{u. s. w.} \end{aligned}\right\} \text{§. 19.}$$

daher $(A + B + C + \ldots.) + (a + b + c + \ldots.) = n . 180°$, vermöge Rk. 47. Grunds. I., und 134. 3);

also ist auch $S + x = n.180°$ }
oder $n.180° - 360° + x = n.180°$ } Nk. 40. Grundf. II. Fig. 46.
woraus endlich $x = 360°$ folgt (Nk. 226.).

2) Jeder Vieleckswinkel eines regelmäßigen n Eckes enthält $\frac{n \,.\, 180° - 360°}{n} = 180° - \frac{360°}{n}$.

Denn vermöge des Vorigen enthalten alle Winkel zusammen $n \,.\, 180° - 360°$. Nun aber sind bey einem regelmäßigen Vielecke alle Umfangswinkel einander gleich (§. 50.); also enthält bey einem regelmäßigen n Ecke ein jeder den $n$ten Theil von der vorigen Summe.

Nach diesem allgemeinen Ausdrucke ist demnach jeder Vieleckswinkel

bey einem regelmäßigen	Dreyecke	$= 180 - \frac{360}{3}$	$=$	$60°$
— — ——	Vierecke	$= 180 - \frac{360}{4}$	$=$	$90°$
— — ——	Fünfecke	$= 180 - \frac{360}{5}$	$=$	$108°$
— — ——	Sechsecke	$= 180 - \frac{360}{6}$	$=$	$120°$
— — ——	Siebenecke	$= 180 - \frac{360}{7}$	$=$	$128\frac{4}{7}°$
— — ——	Achtecke	$= 180 - \frac{360}{8}$	$=$	$135°$
— — ——	Neunecke	$= 180 - \frac{360}{9}$	$=$	$140°$
— — ——	Zehnecke	$= 180 - \frac{360}{10}$	$=$	$144°$
— — ——	Eilfecke	$= 180 - \frac{860}{11}$	$=$	$147\frac{3}{11}°$
— — ——	Zwölfecke	$= 180 - \frac{360}{12}$	$=$	$150°$

u. s. w.

Man sieht hieraus, daß die Vieleckswinkel eines regelmäßigen Vieleckes desto stumpfer werden, je mehr Seiten und Winkel dasselbe enthält.

a) Auch ist es leicht, ein verlangtes regelmäßiges Vieleck, z. B. ein regelmäßiges Fünfeck auf einer gegebenen Geraden AE (Fig. 62.) zu verzeichnen, wenn man an den Endpuncten dieser Geraden, durch Hülfe des Transporteurs, Winkel von 108° errichtet; jeden Schenkel AB und ED dieser zwey Winkel der gegebenen Geraden AE gleich macht, und endlich wieder an den Endpuncten B und D dieser Schenkel, Winkel von 108° verzeichnet. Jedoch ist diese Verzeichnung nur mechanisch oder handwerksmäßig, und nicht geometrisch (§. 17.). Weiter unten wird gezeigt werden, wie einige regelmäßige Vielecke geometrisch verzeichnet werden können.

§. 72.

Um jedes regelmäßige Vieleck $ABCDEF$ kann ein Kreis so geführt werden, daß die Scheitel aller Vieleckswinkel im Umkreise liegen. 47.

Fig. 47. Denn man theile zwey nebenliegende Vieleckswinkel, z. B. ABC und BCD durch die Geraden BM und CM nach §. 40. 3) in zwey gleiche Theile, und ziehe von ihrem Durchschnittspuncte M gerade Linien in die Scheitel der Vieleckswinkel. Da nun bey einem regelmäßigen Vielecke alle Winkel am Umfange einander gleich sind, so sind auch ihre Hälften einander gleich (Rk. 72. I.), nämlich $CBM = BCM$; daher ist das Dreyeck BCM gleichschenkelig (§. 56. 3.), und folglich $CM = MB$.

Ferner ist in den Dreyecken CMB und BMA, die Seite $CB = BA$ und BM gemeinschaftlich, so wie der Winkel $CBM = MBA = \frac{1}{2} CBA = \frac{1}{2} BAF$, daher decken sich diese Dreyecke (§. 23. 1.); und folglich ist $CM = MB = MA$. Da sich dieses von allen Dreyecken erweisen läßt, und daher $MC = MB = MA = MF = ME$ u. s. w. ist, so sind die Scheitel aller Vieleckswinkel von dem Puncte M gleich weit entfernt; folglich liegen sie in einem Umkreise, der aus dem Durchschnittspuncte M mit einem Halbmesser $MC = MB = \ldots$ beschrieben wird.

Aus diesem folgt:

1) Daß jeder Vieleckswinkel eines regelmäßigen Vieleckes, durch die Geraden MA, MF, ME u. s. w., welche aus dem Mittelpuncte M, des herumgeschriebenen Kreises, in die Scheitel derselben gezogen werden, in zwey Theile getheilt wird.

2) Daß jedes regelmäßige Vieleck durch diese gezogenen Geraden MA, MF, ME u. s. s. in so viel gleichschenkelige, einander vollkommen gleiche Dreyecke zertheilt wird, als es Seiten oder Vieleckswinkel hat.

3) Wenn das Vieleck n Seiten enthält, so schneidet jede Seite desselben von dem herumgeschriebenen Kreise einen Bogen von $\frac{360}{n}$ Graden ab. Oder der Mittelpunctswinkel eines regelmäßigen Vieleckes, z. B. AMB enthält $\frac{360}{n}$ Grade, wenn das Vieleck n Seiten hat.

Es ist demnach der Mittelpunctswinkel eines in einem Kreise eingeschriebenen regelmäßigen Dreyeckes $= \frac{360}{3} = 120°$

——	——	Viereckes	$= \frac{360}{4} = 90°$
——	——	Fünfeckes	$= \frac{360}{5} = 72°$
——	——	Sechseckes	$= \frac{360}{6} = 60°$

u. s. w.

§. 73.

Die Seite eines regelmäßigen Sechseckes ist dem Halbmesser des herum beschriebenen Kreises gleich: Fig. 47.
oder eine Sehne, die dem Halbmesser gleich ist, schneidet einen Bogen von 60°, nämlich den sechsten Theil des Umkreises ab.

Es sey AB die Seite eines regelmäßigen Sechseckes, so ist der Mittelpunctswinkel $AMB = 60°$ (§. 72. 3.), und im gleichschenkeligen Dreyecke ABM ist die Summe der zwey gleichen Winkel $MBA + MAB = 180° - 60° = 120°$ (§. 56. 3.), daher ist jeder derselben $= 60°$: also ist das Dreyeck ABM gleichwinkelig, mithin auch gleichseitig (§. 56. 2.); und folglich $AB = BM = AM$. Da nun das Dreyeck MAB gleichwinkelig, mithin der Winkel $AMB = 60° = \frac{360}{6}$, und die Seite $AB =$ dem Halbmesser AM ist; so schneidet die Seite oder Sehne AB den sechsten Theil des Umkreises ab.

§. 74.

In jedes regelmäßige Vieleck kann ein Kreis so eingeschrieben werden, daß dieser von jeder Vieleckseite berührt wird.

Man theile zwey nebenliegende Vieleckswinkel z. B. BAF und AFE durch die Geraden AM und FM in zwey gleiche Theile, und ziehe aus ihrem Durchschnittspuncte M in die Scheitel aller Vieleckswinkel gerade Linien; so wird dadurch vermög §. 72. 1.) jeder dieser Winkel in zwey gleiche Theile getheilt. Zieht man nun aus M senkrechte Linien auf alle Seiten des regelmäßigen Vieleckes, so werden auch diese Seiten, weil die Dreyecke BMA, AMF, FME, u. s. w. vermög §. 72. 2.) alle gleichschenkelig sind, in zwey gleiche Theile getheilt (§. 57. 2.); daher ist $Ag = An = nF = Fm$, u. s. f. Es sind also die rechtwinkeligen Dreyecke gMA, AMn, nMF u. s. w. alle einander gleich, vermög §. 59.); mithin auch die Senkrechte $Mg = Mn = Mm$ . . . . .; also geht der Kreis, welcher aus M mit dem Halbmesser einer solchen Senkrechten beschrieben wird, durch die Endpuncte dieser Halbmesser; folglich berührt jede Seite des Vieleckes diesen Kreis (§. 42. 1.).

a) Diese Einschreibung des Kreises ist bey einem jeden, auch unregelmäßigen Dreyecke möglich; wovon man sich leicht überzeugt, wenn man zwey Winkel eines gegebenen Dreyeckes in zwey gleiche Theile theilt, und aus dem Durchschnitspuncte der Theilungslinien,

Fig. senkrechte Linien auf die Seiten des Dreyeckes fällt; so werden diese drey Senkrechten einander vollkommen gleich seyn, und folglich in einem Umkreise liegen.

§. 75.

39. In jedem Vierecke $ACBD$ bilden die zwey Diagonalen am Umfange desselben acht Winkel; sind davon zwey neben einander liegende, z. B. a und b wechselweise mit zwey andern entgegen stehenden a' b' einander gleich, so läßt sich um das Viereck ein Kreis so umschreiben, daß alle Scheitel des Viereckes im Umfange des Kreises liegen.

Denn ist $a = a'$, so sind die Dreyecke DAE und ECB wegen der gleichen Scheitelwinkel einander ähnlich (§. 59.); folglich ist der Winkel $c = c'$. Ist auch $b = b'$, so ist gleicherweise das Dreyeck $DEB \sim AEC$, und der Winkel $d = d'$.

Nun sind die Winkel $a + b + d + c = 180°$ (§. 53.)
also auch $a + b + d' + c' = 180°$ (Rk. 40. II.)
Auf dieselbe Weise sind $c + b' + d' + a = 180°$
und auch $c + b' + d + a' = 180°$.

Da nun jede zwey gegenüber stehenden Viereckswinkel $a + b = D$ und $d' + c' = C$, so wie $c + b' = A$ und $d + a' = B$ sind und also $D + C$ so wie $A + B$ zusammen 180° betragen, so kann um das Viereck ein Kreis so geführt werden, daß alle Scheitel des Viereckes im Umfange des Kreises liegen (§. 45. 4.).

Vierter Abschnitt.

Von den Proportional-Linien.

I. Von den Eigenschaften der in ähnlichen Dreyecken gleichliegenden Seiten.

§. 76.

47. Aus dem Begriffe einer Proportion (Rk. 259.) erhellet, daß unter Proportional-Linien, drey oder vier gerade Linien verstanden werden, die mit einander in einer richtigen Proportion stehen; daß nämlich bey vier geraden Linien, die erste in der zweyten eben so oft, als die dritte in der vierten enthalten ist, oder wie man kurz zu sagen pflegt: daß sich die erste zur zweyten, wie die dritte

zur vierten; bey drey geraden Linien aber die erste zur zweyten, wie Fig.
die zweyte zur dritten verhält.

§. 77.

An ähnlichen Dreyecken ACB und ECF stehen 48.
die gleichliegenden Seiten (diejenigen nämlich, welche den gleichen Winkeln gegenüber liegen) in Proportion.

Um diese Wahrheit einzusehen, ziehe man aus der Spitze C eines beliebigen Winkels ACB innerhalb seiner Schenkel eine Gerade CD, trage auf diese beliebige, unter sich gleiche Theile $Cm = mn \ldots$, errichte in dem Endpuncte D eine Senkrechte auf die erst gezogene Gerade CD von einer solchen Länge, daß die Schenkel des Winkels geschnitten werden. Nun führe man zu dieser Senkrechten AB durch die aufgetragenen Puncte $m, n, \ldots$ die Parallelen $EF, GH \ldots$; so ist das Dreyeck $CEF \sim CAB$ (§. 65. 1.), in welchem der Winkel $E = A$, $F = B$ und C gemeinschaftlich ist. Hierauf ziehe man die Senkrechten Ec, Gd, Ff, Hg, so sind die dadurch entstandenen rechtwinkeligen Dreyecke alle ähnlich (§. 61. 2.), und haben nebstbey die Katheten Cm, Ec und Gd, wegen der Gleichheit der Abstände der Parallelen, wechselweise gleich; folglich sind diese an der Seite AC anliegenden rechtwinkeligen Dreyecke alle einander gleich (§. 59.). Aus eben diesem Grunde decken sich auch die an der Seite CB liegenden Dreyecke CmF, FfH und HgB.

Es ist daher $CE = EG = GA$ und $CF = FH = HB$ (§. 23. 3.)

daher auch $CE : CF = EG : FH = GA : HB$ (Rk. 72. I.).

Diese gleichen Divisionen oder Quotienten sind auch gleiche Verhältnisse (Rk. 253. 5.); folglich verhält sich

$(CE + EG + GA) : (CF + FH + HB) = CE : CF$ (Rk. 271.),
oder, wenn man anstatt der Theile das Ganze setzet:

so verhält sich $CA : CB = CE : CF$.

Vergleicht man diese aus richtigen Gründen aufgestellte Proportion mit der Figur, so erhellet, daß diejenigen Seiten, die in ähnlichen Dreyecken den gleichen Winkeln gegenüber liegen, in Proportion stehen, wobey zwey Seiten eines Dreyeckes stets ein Verhältniß bilden.

§. 78.

Fig. 48. Umgekehrt, zwey Dreyecke sind einander ähnlich, wenn die Seiten des einen Dreyeckes mit den Seiten des andern in Proportion stehen.

Denn findet $AC : CB = EC : CF$ Statt, so sind vermöge des Vorigen die Winkel, welche den proportionellen Seiten AC und EC gegenüber stehen, einander gleich, nämlich der Winkel $B = F$; aus eben diesem Grunde ist der Winkel $A = E$. Da nun die Dreyecke ACB und ECF zwey Winkel wechselweise gleich haben, so sind sie einander ähnlich, vermög (§. 59.).

§. 79.

Wenn man in einem Dreyecke ACB zu einer beliebigen Seite AB eine Parallele EF führt, so werden dadurch die übrigen zwey Seiten in proportionelle Theile dergestalt geschnitten, daß sowohl die neben einander liegenden Abschnitte unter sich, als auch mit den anliegenden ganzen Seiten, in Proportion stehen.

Es findet nämlich 1tens $CA : CB = CE : CF$,
2tens $EA : CA = FB : CB$,
und 3tens $CE : EA = CF : FB$, Statt.

Denn da $EF \parallel AB$ ist, so ist das Dreyeck $ACB \sim ECF$ vermöge §. 65. 1.); daher verhält sich vermöge §. 77.

$CA : CB = CE : CF$, die 1te Proportion;

aus dieser folgt $CA : CE = CB : CF$ (Rk. 268. I.)

und $(CA - CE) : CA = (CB - CF) : CB$ (Rk. 268. IV.),

oder $EA : CA = FB : CB$, die 2te Proportion;

und endlich aus dieser Proportion findet man

$$(CA - EA) : EA = (CB - FB) : FB,$$

oder $CE : EA = CF : FB$, die 3te Proportion.

§. 80.

Umgekehrt, wenn in einem Dreyecke ACB eine von den vorigen Proportionen, z. B. $BC : AB = BH : Bp$ u. s. w. Statt findet; so ist diejenige Gerade, welche zwey Seiten des Dreyeckes in diese proportionellen Theile schneidet, mit der dritten desselben parallel; es ist nämlich $Hp \parallel AC$.]

Denn wäre Hp nicht parallel zu AC, so könnte durch den Fig.
Punct H eine andere, z. B. Hg parallel zu AC gezogen werden, 48.
vermög §. 1), und dann wäre vermöge §. 77.

$BC:AB = BH:Bg$; der Vorauss. zu folge aber ist
$BC:AB = BH:Bp$,

also auch $BH:Bp = BH:Bg$ (Rk. 249.)
und $Bp = Bg$ (Rk. 265. 2).
Es ist aber $Bp = Bg + gp$ (Rk. 40. Grundf. I.),

daher $Bg + gp = Bg$ (Rk. 40. Grundf. III.)
nämlich $gp = 0$ (Rk. 54. Grundf. I.).

Da nun die Länge von $gp = 0$ ist, so muß die Gerade Hg mit Hp über einander fallen; und nur eine einzige Linie ausmachen; folglich kann, wenn bey einem Dreyecke die obige Voraussetzung Statt findet, von allen Geraden, die durch den Punct H gezogen werden, nur Hp mit AC parallel laufen, weil das Gegentheil unmöglich ist (§. 29.)

§. 81.

Wenn zwey Dreyecke ABC und abc einen Winkel gleich haben, und die Seiten, welche den gleichen Winkel einschließen, in Proportion stehen, so sind die Dreyecke einander ähnlich. 41.

Es sey der Winkel $C = c$ und überdieß finde $CA:CB = ca:cb$ Statt.

Man lege in Gedanken das Dreyeck abc dergestalt auf ABC, daß der Winkel c den gleichen Winkel C decke, die größere Seite ac auf die gleichliegende AC bis D, und die kleinere Seite bc auf BC bis E falle; so ist $EC = bc$, $CD = ca$, und $DE = ab$, so wie der Winkel $x = a$, und $y = b$. Nun aber verhält sich der Voraussetzung zu folge $CA:CB = ca:cb$; setzt man in diese Proportion die gleichen Werthe für ca und cb, so verhält sich auch $CA:CB = CD:CE$. Da nun in dem Dreyecke ABC diese Proportion Statt findet, so ist $DE \parallel AB$ (§. 80.), folglich das Dreyeck $CDE \sim CAB$ (§. 65. 1.); endlich ist wegen der Gleichheit der Dreyecke CDE und cab, auch $cab \sim CAB$.

§. 82.

Um aus ähnlichen Dreyecken die in eine Proportion zusammen gehörigen Seiten jedes Mahl sogleich und unfehlbar aufsetzen zu kön-

Fig. 41. nen, diene folgende allgemeine Regel: Man setze jedes Mahl die zu dem beabsichtigten Zwecke dienlichen zwey Seiten aus einem und demselben Dreyecke in das erste Verhältniß der Proportion, und suche die zwey Seiten, welche den gleichen Winkeln im andern Dreyecke gegenüber liegen, für das zweyte Verhältniß dieser Proportion. Wenn z. B. das Dreyeck $abc \sim ABC$, wenn nämlich der Winkel $b = B$, $a = A$ und $c = C$ ist; so setze man aus dem Dreyecke abc, die Seite $ab : ac$; nun steht der Seite ab der Winkel c entgegen, dieser ist $= C$, und diesem Winkel steht im Dreyecke ABC die Seite AB entgegen; also ist diese Seite das 3te Glied der Proportion. Ferner ist im ersten Dreyecke der Seite ac der Winkel b entgegengesetzt, dieser ist $= B$ im andern Dreyecke, und diesem Winkel liegt die Seite AC gegenüber; folglich ist AC das 4te Glied der Proportion, und es ist $ab : ac = AB : AC$ die richtige Proportion.

Auf diese Weise erhält man aus zwey ähnlichen Dreyecken sehr schnell und richtig die gehörigen proportionellen Seiten.

§. 83.

49. Wenn man in einem Dreyecke ABC einen Winkel ACB durch die Gerade CD halbiret, so sind die dadurch entstandenen Abschnitte AD und DB mit ihren anliegenden Seiten AC und BC in Proportion.

Es sey durch die Theilungslinie CD der Winkel $x = y$ gemacht. Man verlängere am Scheitel des getheilten Winkels eine von den einschließenden Seiten z. B. BC unbestimmt, und ziehe durch den andern Endpunct A der zweyten einschließenden Seite zu der Theilungslinie DC eine Parallele AE, so wird dadurch der Winkel $n = y$ und $x = m$, vermög §. 36. 1) und 2); da der Voraussetzung zufolge $y = x$ ist, so ist auch $m = n$, mithin das Dreyeck ACE gleichschenkelig; folglich $EC = AC$ (§. 56. 3.). Ferner findet im Dreyecke ABE die Proportion $AD : EC = DB : CB$ Statt (§. 79.); substituiret man nun für EC sein gleiches AC, so verhält sich $AD : AC = DB : CB$.

Hier finden auch noch folgende in manchen Fällen nützliche Proportionen Statt:

$CB : CD = BE : EA$ (§. 77.),
oder $CB : CD = (BC + CE) : EA$
oder $CB : CD = (BC + CA) : EA$.

§. 84.

1. Aufgabe. Zu drey gegebenen Geraden a, b, c die vierte Proportional-Linie x durch Verzeichnung, d. i. geometrisch zu bestimmen, daß sich nämlich verhält $a : b = c : x$. Fig.

Auflösung. Man verzeichne einen Winkel PEQ ungefähr von 60 Graden (§. 32. 1.), trage aus der Spitze E auf einen Schenkel die gegebene Gerade a, z. B. von E bis m, sodann die Gerade b von E bis n auf den andern Schenkel des Winkels, und verbinde diese zwey erhaltenen Puncte m und n durch die Gerade mn; endlich trage man die dritte gegebene Gerade c wieder auf den ersten Schenkel von E nach p auf, führe durch diesen Punct eine Parallele zu mn; so wird $Eq = x$ die vierte Proportionale seyn. 50.

Denn in den ähnlichen Dreyecken Emn und Epq, verhält sich $Em : En = Ep : Eq$, oder $a : b = c : x$.

2. Aufgabe. Zu zwey gegebenen Geraden d und f die 3te Proportional-Linie x zu finden, daß sich nämlich verhält $d : f = f : x$.

Auflösung. Auf den Schenkel EQ eines gehörigen Winkels trage man wieder die gegebene Gerade d von E bis p, auf den andern Schenkel die Linie f, von E bis r, und diese gegebene Gerade f auch auf den ersten Schenkel von E bis s, ziehe die Parallele st zu pr; so ergibt sich die 3te Proportionale $Et = x$.

Denn es verhält sich wieder $Ep : Er = Es : Et$, oder $d : f = f : x$.

3. Aufgabe. Eine gegebene Gerade AB in eine verlangte Anzahl, z. B. in fünf gleiche Theile zu theilen. 51.

Auflösung. Man verzeichne an einem Endpuncte A einen Winkel CAB, von beyläufig 60 Graden, trage von A einen beliebigen Theil $A1$ gegen C so oft auf, als die gegebene Gerade AB gleiche Theile haben soll, hier in unserm Falle fünf, verbinde den letzten Punct 5, mit dem andern Endpuncte B, und führe durch alle Puncte 4, 3, 2, 1 parallele Linien zu $B5$; so ist dadurch die gegebene Gerade AB in 5 gleiche Theile getheilt; es wird nämlich $Am = \frac{1}{5} AB$; $An = \frac{2}{5} AB$ seyn, u. s. w.

Denn die Dreyecke $AB5$, $Am1$, $An2$, u. s. w. sind alle einander ähnlich (§. 65. 1.);

daher verhält sich $A5 : AB = A1 : Am$ (§. 77.),
oder $A5 : A1 = AB : Am$ (Rk. 268. I.)
und $A5 : A1 = 5 : 1$. vermöge der Construction,
daher auch $5 : 1 = AB : Am$ (Rk. 40. Grunds. III.);
folglich ist $Am = \frac{1}{5} AB$; u. s. w.

Fig. 51. 4. Aufgabe. Eine Gerade AB in zwey solche Theile zu theilen, die sich verhalten wie $p:q$, z. B. wie 2:3.

Auflösung. Man trage auf der, mit obiger Bemerkung gezogenen, Geraden AC einen beliebigen Theil so oft auf, als die Summe der Verhältnißzahlen die Einheit enthält, hier $p+q=2+3=5$, ziehe durch den $p$ten = 2ten Punct zu B 5 die Parallele $n2$; so verhält sich $An:nB=2:3$;

$$\begin{array}{rl} \text{Denn es verhält sich } A2 : An & = 2\ldots5 : nB \ (\S.\ 79), \\ \text{oder } A2 : 2\ldots5 & = An : nB, \\ \text{und vermög Construction } A2 \,.\, 2\ldots5 & = 2 : 3 \\ \hline \text{folglich auch } An : nB & = 2 : 3. \end{array}$$

a) Wäre die gerade AB in mehre Theile zu theilen, die sich verhalten wie $\frac{p}{q} : \frac{m}{n} : r \ldots$, z. B. wie $\frac{2}{3} : \frac{1}{2} : 2$, so drücke man die Verhältnißzahlen, ohne ihren Werth zu ändern, nach Rk. 253. in ganzen Zahlen aus, und es ist $\frac{2}{3} : \frac{1}{2} : 2 = 4 : 3 : 12$. In diesen und ähnlichen Fällen wird die Summe der Verhältnißzahlen schon groß, und die Zeichnung zur Lösung der Aufgabe unbequem oder unrichtig. In solchen Fällen ist die Rechnung mit Hülfe eines geometrischen Maßstabes der Zeichnung vorzuziehen. Man verfährt dabey am einfachsten, wenn man die gegebene Gerade auf einen beliebigen Maßstab überträgt, und ihre darauf gefundenen Theile, z. B. $AB=290$, durch die Summe der Verhältnißzahlen $4+3+12=19$ dividirt, den Quotienten, hier $290:19=15{,}263$, mit jeder einzelnen Verhältnißzahl multiplicirt, jedes einzelne Product, hier $15{,}263 \,.\, 4=61{,}052$; $15{,}263 \,.\, 3=45{,}789$ und $15{,}263 \,.\, 12=183{,}156$, auf demselben Maßstabe abgreift, und auf die gegebene Gerade überträgt, so wird selbe in die verlangten Theile auf das Genaueste getheilt seyn. Der Grund dieses Verfahrens erhellet aus Rk. 296.

b) In der Ausübung ist es vortheilhaft, wenn die auf dem Schenkel AC aufgetragenen beliebigen gleichen Theile zusammen genommen nicht viel größer, aber auch nicht viel kleiner sind, als die zu theilende Linie AB (§. 32. 1.).

§. 85.

Aufgabe. Eine gegebene gerade Linie in sehr viele, z. B.
52. sechs Wiener Zolle = AB, oder eine andere beliebige Länge, in 1000 gleiche Theile zu theilen, das ist: einen geometrischen Maßstab zu zeichnen.

Auflösung. Man zerlege jedes Mahl die Zahl, welche anzeigt, in wie viel gleiche Theile eine gegebene Gerade getheilt werden soll, in

zwey oder drey, entweder ganz gleiche, oder doch solche Factoren, die nicht viel von einander verschieden sind, damit nämlich der zu verzeichnende Maßstab eine schickliche Figur erhalte. Hier in diesem Falle erhält der Maßstab die schicklichste Figur, wenn man die Zahl 1000 in die Factoren 10 . 10 . 10 zerlegt. Fig. 52.

Nun trage man einen solchen Factor auf die gegebene AB, das ist, man theile sie nach §. 84. 3) in 10 gleiche Theile, errichte an den Endpuncten A und B die Senkrechten AC und BD, trage auf jede derselben, vermöge des zweyten Factors, 10 beliebige, aber unter sich gleiche Theile auf, ziehe durch diese Puncte zehn gerade Linien, die alle mit AB parallel laufen werden. Auf die letzte derselben, nämlich auf CD trage man wieder die 10 gleichen Theile wie auf AB von C gegen D auf, welche genau bis D reichen müssen, wenn die Senkrechten AC und BD richtig gezogen sind. Hierauf verbinde man die Theilungspuncte der beyden Linien AB und CD durch die Geraden ac, 100 d, 200 e, u. s. w.; so wird man dadurch die **Hauptabtheilungen** des Maßstabes erhalten. Endlich theile man auch noch die Linien Aa und Cc vermöge des dritten Factors, in 10 gleiche Theile vermög §. 84. 3), und ziehe durch diese Theilungspuncte die Querlinien (Transversalen) an, 10 m, u. s. w.; so erhält man dadurch die **Transversal-Eintheilung**. Schreibt man nun die Zahlen hin, wie sie in der Figur zu sehen sind; so ist die Linie AB in 1000 gleiche Theile getheilt, und der geometrische oder 1000 theilige Maßstab fertig. Nämlich $b8$ enthält 8, a 10 enthält 10, a 50 enthält 50, a 100 enthält 100, a 600 enthält 600 solche Theile, deren $1000 = AB$ sind; oder es ist $b8 = \frac{8}{1000}$ von AB, $8v = \frac{48}{1000} AB$, u. s. w.

Denn in den ähnlichen Dreyecken anc und $ab8$ verhält sich

$ac : nc = a8 : b8$ (§. 65. und 77.);

es ist aber $ac : a8 = 10 : 8$ vermög Construction;

---

daher auch $10 : 8 = nc : b8$ (Rk. 270. 1.)

oder $10 : 8 = \frac{1}{10} Aa : b8$, weil $nc = \frac{1}{10} Cc = \frac{1}{10} Aa$ } vermög

oder $10 : 8 = \frac{1}{10} . \frac{1}{10} AB : b8$, weil $Aa = \frac{1}{10} AB$ ist } Constr.

oder $10 : 8 = \frac{1}{100} AB : b8$

oder $1000 : 8 = AB : b8$ (Rk. 268. V.);

folglich ist $b8 = \frac{8}{1000} . AB = \frac{8}{1000}$tel von AB.

Eben so leicht ist einzusehen, daß $8v = \frac{48}{1000} AB$ ist.

Denn es ist $v8 = vb + b8$

Fig. 52. nun ist aber vermöge der Construct. u. des Vorherg. $\begin{cases} vb = a40 = \frac{4}{10} Aa = \frac{4}{100} AB = \frac{40}{1000} AB. \\ b8 = \frac{8}{1000} AB; \end{cases}$

folglich ist auch $v8 = \frac{40}{1000} AB + \frac{8}{1000} AB = \frac{48}{1000} AB.$

Auf eben diese Art sieht man, daß $hv = 548$ ist; weil $hv = vb + b8 + 8h = 40 + 8 + 500 = 548$ ist, u. s. w.

1) Aus der Einrichtung dieses Maßstabes ist zu sehen, daß man eine Länge, welche z. B. 530 solcher Theile enthalten soll, deren 1000 gleich AB sind, von diesem Maßstabe mit dem Zirkel abnehmen (abgreifen, abstechen) kann, wenn man eine Spitze desselben in 500 einsetzt, und die andere bis 30 eröffnet. Soll eine Linie von 508 Theilen abgegriffen werden, so eröffnet man den Zirkel von h bis b; wären endlich nur $507\frac{1}{2} = 507{,}5$ Theile abzunehmen, so müßten die Zirkelspitzen in der Mitte der zwey Parallelen 8..8 und 7..7, und zwar die eine auf der Senkrechten 500 h, und die andere auf der Transversale ab eingesetzt werden, u. s. f.

2) Auch kann man untersuchen, wie viel Theile eine gegebene Gerade, z. B. die Gerade En in Fig. 50 auf diesem Maßstabe abschneide, wenn man sie zwischen die Zirkelspitzen fasset, und sodann diese Öffnung des Zirkels auf die Gerade AB dergestalt überträgt, daß die erste Spitze auf einem der Theilungspuncte 200, 300 u. s. w. eingesetzt ist, die zweyte aber zwischen A und a eintrifft. Sollte nun diese zweyte Spitze zwischen A und a genau in einem Theilungspuncte z. B. in 60, und die erste in 200 eintreffen, so würde die gegebene Linie $En = 260$ seyn. Wenn hingegen die zweyte Spitze zwischen zwey Theilungspuncten, z. B. zwischen 60 und 50 eintrifft; so rücke man den Zirkel so lange parallel vorwärts, bis diese Spitze genau auf eine Transversale trifft. Ereignet sich dieses in dem Puncte u, wenn nämlich die eine Spitze in u auf der Transversale 50 u, die andere aber auf der Parallele 5..5 in u eintrifft; so enthält die gegebene Gerade 255 Theile. Würden hingegen die Spitzen nur in der Mitte der Parallelen 4..4 und 5..5, jedoch auf der Senkrechten 200, und auf der Transversale 50 eintreffen; so würde die gegebene Linie nur $254\frac{1}{2} = 254{,}5$ Theile enthalten.

3) Wäre die gegebene Linie, die auf diesem Maßstabe zu untersuchen ist, größer als AB; so wird nur die Hälfte, der 3te oder 4te Theil davon auf den Maßstab übertragen, und die allda gefundene Zahl sonach mit 2, 3, oder 4 multiplizirt, um die Theile der ganzen gegebenen Linie zu erhalten.

4) Wenn man nun $Aa = 100$ Zolle, 100 Schuhe, oder 100 Schritte, oder auch 100 Klafter u. s. w. gelten läßt, so heißt diese Eintheilung ein verjüngter Maßstab. Die Eintheilung durch Hülfe der Transversalen eines wirklichen Zolles in Linien und Puncte, u. dgl. gründet sich ebenfalls auf diese Theorie. Das noch Nöthige über die verjüngten Maßstabe, welche in der praktischen Geometrie unentbehrlich sind, wird an seinem Orte vorkommen. Fig. 52.

5) Bey der Untersuchung der Richtigkeit eines geometrischen Maßstabes, müssen sowohl die zwey Diagonalen BC und AD des ganzen Rechteckes $ABDC$, als auch die Diagonalen aller Hauptabtheilungen $Ac = c\,100 = 100\,e = e\,300 \ldots\ldots = Ca = ad = d\,200 = 200\,f \ldots\ldots$ unter einander gleich seyn. Nicht minder müssen auch die gleichliegenden oder parallelen Diagonalen der Transversal-Theilung, wie $9n = bm$, u. s. f. einander gleich seyn.

II. Von den proportionellen Theilen gerader Linien sowohl innerhalb als außerhalb des Kreises.

§. 86.

Fället man aus einem beliebigen Puncte C des Umkreises eine Senkrechte CD auf den Durchmesser AB, so entstehen auf diesem zwey Abschnitte AD und DB, und es ist: 53.

1) diese Senkrechte die mittlere Proportionale zwischen den Abschnitten AD und DB des Durchmessers: es verhält sich nämlich $AD : CD = CD : DB$, und

2) die Sehne AC, welche von jenem Puncte C des Umkreises bis zu einem Endpuncte A des Durchmessers gezogen wird, ist die mittlere Proportionale zwischen dem anliegenden Abschnitte AD und dem ganzen Durchmesser AB; es verhält sich nämlich $AD : AC = AC : AB$.

Beweis zu 1). Man ziehe die Sehnen AC und CB, so ist das Dreyeck ACB rechtwinkelig (§. 45. 3.), und wegen der Senkrechten CD sind die Dreyecke ADC und DCB ähnlich (§. 62.), daher verhält sich $AD : DC = DC : DB$ (§. 82.); daraus folgt $DC^2 = AD \,.\, DB$ *); man kann nämlich auch sagen: das Qua-

*) In einigen geometrischen Schriften werden die Potenzen einer Linie auch so angezeigt: $\overline{DC}^2$, $\overline{AB}^3$, $\overline{AC}^m$, anstatt daß man sie eigentlich mit $(DC)^2$, $(AB)^3$, $(AC)^m$, bezeichnen sollte. Wir aber werden uns in der Folge durch-

Fig. 53. drat einer jeden Senkrechten, die von einem Puncte des Umkreises auf den Durchmesser (oder aus dem rechten Winkel auf die Hypothenuse) gezogen wird, ist gleich dem Producte der dadurch entstandenen Abschnitte des Durchmessers (oder der Hypothenuse eines rechtwinkeligen Dreyeckes).

Beweis zu 2). Vermög §. 62 ist auch das Dreyeck $ADC \sim ACB$, also verhält sich $AD : AC = AC : AB$,

daraus folgt $AC^2 = AD . AB$.

Aus den ähnlichen Dreyecken DCB und ACB findet man auf gleiche Weise $CB^2 = DB . AB$.

Da die Sehnen AC und CB zugleich auch die Katheten des rechtwinkeligen Dreyeckes sind, so folgt: daß das Quadrat einer jeden Kathete gleich ist dem Producte aus dem anliegenden Abschnitte und der Hypothenuse; oder welches dasselbe ist: das Quadrat, welches auf jeder Kathete verzeichnet wird, ist so groß, als das Rechteck, welches aus dem anliegenden Abschnitte und der Hypothenuse verzeichnet wird (§. 69).

§. 87.

An jedem rechtwinkeligen Dreyecke ABC ist das Quadrat der Hypothenuse eben so groß, als die Quadrate der beyden Katheten zusammen genommen; es ist nämlich $AB^2 = AC^2 + CB^2$.

Um diese wichtige Wahrheit einzusehen, ziehe man aus dem rechten Winkel eine Senkrechte auf die Hypothenuse, so ist dem erst Erwiesenen zu folge $AC^2 = AD . AB$

und $CB^2 = DB . AB$

also auch $AC^2 + CB^2 = AD . AB + DB . AB$ (Rk. 47. I.)

oder $AC^2 + CB^2 = AB (AD + DB)$ (Rk. 158.)

oder $AC^2 + CB^2 = AB . AB$ (Rk. 40. I. und II.)

endlich ist $AB^2 = AC^2 + CB^2$.

---

aus der obigen Bezeichnungsart bedienen; und es wird unter DC^2 jedes Mahl verstanden werden, daß die Länge einer Linie DC mit sich selbst multiplicirt, oder welches dasselbe ist, zur 2ten Potenz oder ins Quadrat erhoben werden soll; indem man sich vorstellt, daß sie vermittelst einer, bey einem verjüngten oder wirklichen landesüblichen Maße, zum Grunde gelegten Einheit, als Zahl, d. i. als ein Vielfaches dieser Einheit ausgedrückt ist (Rk. 21.)

a) Obgleich bey diesem Beweise Kürze mit genügender Schärfe vereint ist, so gewährt er doch nicht die geometrische Anschaulichkeit, wie der ursprüngliche von seinem Erfinder, Pythagoras, uns überlieferte, der erst weiter unten nach Entwickelung mehrer Gründe aufgestellt werden wird. Dieser und der §. 77. aufgestellte Satz sind ungemein reiche und gleichsam unerschöpfliche Quellen, aus welchen die wichtigsten Wahrheiten in alle Theile der Meßkunst fließen. Fig. 53.

§. 88.

Umgekehrt, wenn in einem Dreyecke das Quadrat der größten Seite den Quadraten der andern zwey Seiten zusammen gleich ist; so ist dieses Dreyeck rechtwinkelig, wenn nämlich $AB^2 = AC^2 + CB^2$ ist, so ist der Winkel $m = 90°$. 54.

Denn man errichte auf AC in dem Puncte C die senkrechte CD, und mache $CD = CB$, so ist in dem rechtwinkeligen Dreyecke ACD.

$AD^2 = AC^2 + CD^2$ vermöge des Vorigen,

und $AD^2 = AC^2 + CB^2$, wegen $CD = CB$.

Nun aber ist $AB^2 = AC^2 + CB^2$, zu folge der Voraussetzung,

also auch $AD^2 = AB^2$

und $AD = AB$.

Da nun diese Dreyecke alle drey Seiten einzeln wechselweise gleich haben, so decken sie sich, und es ist der Winkel $n = m$ (§. 23. 3.); folglich jeder $= 90°$ vermög §. 19.

§. 89.

Aus der vorigen Gleichung $AB^2 = AC^2 + CB^2$ folgt

die Hypothenuse $AB = \sqrt{AC^2 + CB^2}$

die eine Kathete $AC = \sqrt{AB^2 - CB^2}$

und die andere $CB = \sqrt{AB^2 - AC^2}$

vermög Rk. 233.

das heißt: aus den gegebenen Katheten eines rechtwinkeligen Dreyeckes findet man die Hypothenuse, wenn man jede Kathete besonders ins Quadrat erhebt, und nachher aus ihrer Summe die Quadratwurzel zieht. Aus der gegebenen Hypothenuse und Einer Kathete aber findet man die andere, wenn man das Quadrat der gegebenen Kathete vom Quadrate der Hypothenuse subtrahirt und aus dieser Differenz die Quadratwurzel zieht. Es sey z. B. die eine Kathete $AC = 4$, und die andere $CB = 3$ Einheiten eines beliebigen Maßstabes, so ist die Hypothenuse $AB = \sqrt{(16 + 9)} = \sqrt{25} = 5$ solcher Theile; folglich schließen drey Seiten, die sich wie $3 : 4 : 5$, oder wie

Fig. 54. die Vielfachen dieser Zahlen, nämlich $3n : 4n : 5n$ verhalten (Nr. 268. V.), ein rechtwinkeliges Dreyeck ein (wo im letzten Falle n was immer für eine ganze oder gebrochene Zahl bedeuten kann). Man pflegt auch wirklich in der Ausübung eine Schnur nach diesen Verhältnissen, nämlich in 12, 24, 36, 48.... gleiche Theile einzutheilen, sodann diese Schnur dergestalt zusammen zu nehmen, daß auf eine Seite entweder 3, 6, 9 oder 12...., auf die andere 4, 8, 12 oder 16...., und auf die dritte Seite entweder 5, 10, 15 oder 20.... solche Theile kommen, und so zur Errichtung der Senkrechten auf dem Felde zu gebrauchen.

a) Nun sind wir auch im Stande, auf dem Papiere oder einer andern ebenen Fläche ein Rechteck von **bestimmter Größe auf das Genaueste** zu verzeichnen. Wenn man nämlich die gegebene Grundlinie und Höhe jede besonders ins Quadrat erhebt, und aus ihrer Summe die Quadratwurzel zieht; so erhält man die Diagonale des Recht-
31. eckes. Ist z. B. $DC = 25$ und $DA = 20$ Zolle; so findet man $AC = DB = \sqrt{(25^2 + 20^2)} = 32'',015$. Nun trage man die gegebene Grundlinie aus einem beliebigen Puncte D nach C auf, beschreibe mit der gegebenen Höhe des Rechteckes aus D und C Bogen bey A und B, durchschneide mit derjenigen Länge, welche die gefundene Quadratwurzel zu erkennen gibt, den Bogen bey A aus dem Puncte C, und den Bogen bey B aus D, verbinde diese Puncte gehörig; so wird das Rechteck von der **verlangten Größe auf das Genaueste** bestimmt seyn.

§. 90.

53. 1. Setzt man des Kreises Halbmesser $AM = a$, so ist $AB = 2a$, und den Abschnitt $AD = x$, so ist der andere Abschnitt des Durchmessers, nämlich $DB = 2a - x$; setzt man ferner die Senkrechte $CD = y$ und substituirt diese Werthe in die Gleichung des obigen §. 86 unter 1), so ist

$$y^2 = x\,(2a - x) = 2ax - x^2.$$

Man nennt die Gerade AB auch die **Abscissenlinie**, und die Senkrechte CD die **Ordinate** der Kreislinie, welche Benennung auch bey andern krummen Linien gewöhnlich ist. Um die Lage eines beliebigen Punctes C einer krummen Linie zu bestimmen, wird nämlich eine Gerade AB in der Ebene der Krummen nach beliebiger Richtung gezogen, ein Punct derselben, z. B. A, für den Anfangspunct angenommen, und sodann aus dem Puncte C der Krummen eine Senkrechte CD auf die Gerade AB gefället. Durch die bekannten Längen der zwey Geraden AD und DC ist nun die Lage des

Punctes C bestimmt. Das Stück AD heißt die Abscisse (Länge), Fig.
und die Senkrechte CD die Ordinate (Breite) des Punctes C. 53.
Der Punct A wird der Anfangspunct der Abscissen genennt.

II. Setzt man den Anfangspunct der Abscissen in den Mittelpunct des Kreises, $MD = x$, so ist $AD = a - x$, und $MB = a + x$; folglich $y^2 = (a - x)(a + x) = a^2 - x^2$, und endlich $y = \pm \sqrt{a^2 - x^2}$ (Rk. 233.). Dieses erhellet auch schon aus dem rechtwinkeligen Dreyecke CDM; denn es ist $CD^2 = CM^2 - DM^2$; nämlich $y^2 = a^2 - x^2$, und $y = \pm \sqrt{(a^2 - x^2)}$. Das Zeichen $\pm$ deutet an, daß zu einer jeden Abscisse MD zwey gleiche Ordinaten nach entgegengesetzter Richtung, die eine auf- die andere abwärts zu ziehen sind.

Denn aus dem Begriffe der positiven und negativen Größen ist 131.
bekannt (Rk. 141.), daß alle Senkrechten AQ, CD, ML, cd, welche von der Geraden AE herunterwärts gezogen werden, negativ seyn müssen, wenn man die Senkrechten AP, CB, MG, cb, die von eben derselben Geraden AE hinaufwärts gezogen sind, für positiv annimmt; oder umgekehrt. Desgleichen jede Abscisse Mc von dem angenommenen Anfangspuncte M gegen die Rechte gerechnet, muß negativ seyn, wenn man die Abscissen MC von eben demselben Anfangspuncte M gegen die Linke gezählet, für positiv annimmt; oder umgekehrt.

Aus dieser zweyten Gleichung $y = \pm \sqrt{(a^2 - x^2)}$ des Kreises können folgende, theils schon erläuterte, theils noch unerläuterte Eigenschaften desselben hergeleitet werden:

1) Die Ordinaten in dem angenommenen Anfangspunct, d. i. im Mittelpuncte des Kreises ist dem Halbmesser gleich. Denn man setze für $x = 0$, so ist $y = \pm \sqrt{a^2} = \pm a$.

2) Zu zwey gleichen Abscissen, deren eine positiv, die andere negativ ist, gehören gleiche Ordinaten; z. B. wenn $MC = Mc = \pm x$ ist, so ist auch $CB = cb$, $CD = cd$ und $BD = bd$; es sind nämlich zwey Sehnen in einem und demselben Kreise, die gleichweit vom Mittelpuncte abstehen, einander gleich.

3) An den Endpuncten des Durchmessers sind die Ordinaten $= 0$. Denn man setze $x = a$ und $x = -a$, so ist in beyden Fällen $y = 0$.

4) Über die Endpunkte A und E des Durchmessers weiter hinaus sind keine Ordinaten möglich: denn man setze für $x = (a + p)$, und $x = -(a + p)$; so ist in beyden

Fig. 131. Fällen die Ordinate $y = \pm\sqrt{(-2ap - p^2)}$ eine unmögliche Größe, es mag p eine noch so große oder eine noch so kleine positive Größe bedeuten; folglich ist der Kreis eine in sich selbst geschlossene krumme Linie.

5) Jede Gerade MB oder MD.... aus dem angenommenen Anfangspuncte M zu was immer für einem Puncte B, D.... des Umkreises gezogen, ist $= a$; folglich sind alle Puncte des Umkreises von diesem Puncte M gleichweit entfernt. Denn es ist $MB = \sqrt{(MC^2 + CB^2)} = \sqrt{x^2 + (a^2 - x^2)} = \sqrt{a^2} = a$.

§. 91.

53. 1. Aufgabe. Zwischen zwey gegebenen Geraden a und b die mittlere Proportionale x zu finden; daß nämlich die Proportion $a : x = a : b$ Statt finde *).

Auflösung. Man ziehe eine Gerade AB, trage die gegebene a, von A bis D, und b von D bis B, theile sodann AB in zwey gleiche Theile, beschreibe aus M den Halbkreis ACB, und errichte in D die Senkrechte DC auf dem Durchmesser AB, so ist DC die gesuchte mittlere Proportionale (§. 86. 1.)

Oder: man ziehe AB, trage die größere gegebene Gerade c, von A bis B, und beschreibe den Halbkreis ACB. Hierauf trage man die gegebene d, von B bis D, errichte die Senkrechte DC, und ziehe die Sehne BC; so ist diese ebenfalls die gesuchte mittlere Proportionale zwischen den gegebenen Geraden c und d (§. 86. 2).

53. 2. Aufgabe. Eine Gerade AB in zwey solche Theile zu theilen, daß der größere Theil die mittlere Proportionale zwischen dem kleinern Theil und der ganzen gegebenen Geraden ist; oder wie man diese Theilung (die in den ältern geometrischen Schriften der goldene Schnitt genannt ist) auch zu nennen pflegt: die gegebene Gerade AB in das mittlere und äußere Verhältniß zu theilen; daß sich nämlich verhält $EB : AE = AE : AB$.

Auflösung. Man verlängere die gegebene AB, und mache $AC = \frac{1}{2}AB$, errichte in A die Senkrechte $AD = AB$, beschreibe mit CD den Bogen DE; so ist E der Punct, in welchem die gegebene AB in das verlangte Verhältniß getheilt ist.

---

*) Man pflegt der Einfachheit wegen, öfters die Länge einer Linie einem einzigen Buchstaben gleich zu setzen. In einem solchen Falle stellet der Buchstaben den Werth oder die Anzahl der Einheiten vor, welche die Länge der Linie auf einem beliebigen Maßstabe gemessen enthält (§. 85. 2.).

Denn es ist $CD^2 = DA^2 + AC^2$, und Fig. 55.

$(CA + AE)^2 = AB^2 + (\frac{1}{2}AB)^2$, verm. Construct.

$(\frac{1}{2}AB + AE)^2 = AB^2 + \frac{1}{4}AB^2$

$\frac{1}{4}AB^2 + AB.AE + AE^2 = AB^2 + \frac{1}{4}AB^2$

$AE^2 = AB^2 - AB.AE$

$AE^2 = AB\,(AB - AE) = AB.EB$;

folglich verhält sich $EB : AE = AE : AB$.

3. Aufgabe. Zwischen zwey gegebenen Geraden CD und ab die arithmetische mittlere Proportional-Linie zu finden. 34.

Auflösung. Man ziehe in beliebiger Entfernung von CD eine Parallele AB, und mache diese der gegebenen ab gleich; verbinde ihre Endpuncte, nämlich A mit C, und B mit D, theile eine von den Verbindungslinien, z. B. CA in dem Puncte E in zwey gleiche Theile, ziehe durch diesen Theilungspunct E zu AB die Parallele EF; so ist diese die gesuchte arithmetische mittlere Proportional-Linie; es ist nämlich $EF = \frac{AB + CD}{2} = \frac{ab + CD}{2}$.

Denn man ziehe durch A zu DB die Parallele AG, so ist $AB = HF = GD$ (§. 66. 1), und das Dreyeck $AEH \sim ACG$ (§. 65. 1).

Daher verhält sich $AC : CG = AE : EH$

oder $AC : AE = CG : EH$.

Nun verhält sich aber $AC : AE = 2 : 1$ vermög Construct.;

daher auch $2 : 1 = CG : EH$

und es ist $EH = \frac{CG}{2}$.

Es ist aber $EF = EH + HF = EH + GD$, folglich auch

$$EF = \frac{CG}{2} + GD = \frac{CG + 2GD}{2} = \frac{CG + GD + GD}{2} = \frac{CD + AB}{2} = \frac{CD + ab}{2}.$$

Da die Figur $ABDC$ ein Trapez ist (§. 48.); so ist diejenige Gerade, die in einem Trapez in der halben Seite der Verbindungslinien AC oder BD, zu einer der gleichlaufenden Seiten CD oder AB parallel geführt wird, jedes Mahl die arithmetische mittlere Proportional-Linie zwischen diesen beyden gleichlaufenden Seiten. Sie kann daher erforderlichen Falles immer für die halbe Summe derselben gesetzt werden.

§. 92.

Fig. Wenn sich in einem Kreise zwey Sehnen in was
56. immer für einem Puncte E schneiden, so stehen ihre Abschnitte verkehrt genommen in Proportion; oder das Product aus den Abschnitten der einen Sehne ist dem Producte aus den Abschnitten der andern Sehne gleich.

Denn es ist der Winkel $m = n$, $A = D$ und $C = B$ (§. 45. 2.); folglich ist das Dreyeck $ACE \backsim EBD$,

und es verhält sich $AE : CE = ED : EB$,

also ist $AE . EB = CE . ED$ (Rk. 265.).

§. 93.

57. Zwey gerade Linien AB und BC, die aus einem außerhalb des Kreises gelegenen Puncte B in den Kreis so gezogen sind, daß sie diesen zweymahl schneiden, heißen Secanten. (Diese geometrischen Secanten sind von den weiter unten folgenden trigonometrischen zu unterscheiden). Die außerhalb des Kreises liegenden Theile BD und BE heißen ihre Abschnitte.

Die ganzen Secanten stehen mit ihren außerhalb des Kreises liegenden Abschnitten DB und EB in verkehrter Proportion; oder die Producte der Secanten mit ihren Abschnitten, sind einander gleich.

Man verbinde die Durchschnittspuncte D mit E und A mit C,

so ist $A + w = 180°$ (§. 45. 4),

und auch $w + v = 180°$ (§. 19.),

also $A + w = w + v$,

und $A = v$.

Da der Winkel ABC den beyden Dreyecken BDE und BAC gemeinschaftlich ist, so sind diese ähnlich (§. 59.); also

verhält sich $AB : BC = BE : BD$;

folglich ist $AB . BD = BC . BE$.

§. 94.

Wenn aus einem außerhalb des Kreises gelegenen Puncte B eine Tangente BT und eine Secante BC gezogen wird, so ist die Tangente die mittlere Proportionale zwischen der ganzen Secante und ihrem Abschnitte außer dem Kreise.

Denn die Dreyecke CBT und EBT haben den Winkel CBT Fig.
gemein, und $q = p$ (§. 44. u. 45.), also sind sie ähnlich (§. 59.); 57.

folglich verhält sich $BC : BT = BT : BE$;

daraus findet man $BT^2 = BC . BE$, und endlich $BT = \sqrt{(BC . BE)}$

Aus eben diesem Grunde ist auch die Tangente $Bt = \sqrt{(BC . BE)}$

folglich ist $BT = Bt$,

das heißt: die zwey Tangenten, welche aus einem nämlichen Puncte an einen Umkreis gezogen werden können, sind einander gleich.

§. 95.

Aufgabe. Aus dem bekannten Erddurchmesser $EC = 6713223$ Wiener Klafter und aus der Erhöhung des Auges über die Oberfläche der Erde eines Beobachters $BE = 6' = 1°$, die Entfernung zu bestimmen, in welcher der Sehestrahl desselben die Erde, als Kugel betrachtet, zu berühren scheint.

Auflösung. Man denke sich den Sehestrahl BT gezogen, so ist vermög des Vorigen $BT = \sqrt{CB . EB} = \sqrt{6713223 . 1} =$ 2590 W. Kl. $= 1\frac{1}{3}$ Stund. Hieraus erhellet, daß Gegenstände, die nur wenig über den Boden einer flachen (sogenannten ebenen) Gegend, oder über die Meeresfläche erhaben sind, nicht viel über eine Stunde Weges gesehen werden können.

§. 96.

In jedem ungleichseitigen Dreyeck ACB verhält 58.
sich die größte Seite zur Summe der übrigen zwey Seiten, so wie sich verhält die Differenz dieser zwey Seiten zur Differenz der Abschnitte, welche dadurch entstehen, wenn man auf die größte Seite aus dem gegenüber stehenden Winkel eine Senkrechte fällt; es verhält sich nämlich

$$AB : (BC + AC) = (BC - AC) : (DB - AD).$$

Aus dem Scheitel des größern Winkels beschreibt man mit der kleineren anliegenden Seite AC als Halbmesser einen Kreis, und verlängere die andere anliegende Seite BC bis an den Umkreis in E; so ist $EC = AC = FC$, und es

verhält sich $AB : EB = FB : GB$ (§. 93.).

Nun ist $EB = EC + CB = AC + CB$,

und $FB = CB - FC = CB - AC$;

und wegen der Senkrechten CD, ist $AD = DG$ (§. 39. 1.),

daher auch $GB = DB - DG = DB - AD$;

Fig. 58. substituirt man diese Werthe in die obige Proportion, so erhält man

$$AB : (BC + AC) = (BC - AC) : (DB - AD).$$

§. 97.

Aufgabe. Aus den gegebenen drey Seiten eines Dreyeckes ACB die Abschnitte AD und DB der Grundlinie, und die Höhe DC des Dreyeckes zu finden.

Auflösung. Man bestimme vermöge der erst aufgestellten Proportion $AB : (BC + CA) = (BC - CA) : (BD - AD)$ die Differenz der Abschnitte, nämlich

$BD - AD = BG = \frac{(BC + CA)(BC - CA)}{AB}$, ziehe die halbe Differenz $\frac{BG}{2}$ von der halben Grundlinie $\frac{AB}{2}$ ab; so erhält man den kleinern Abschnitt $AD = \frac{AB}{2} - \frac{BG}{2}$ (Rk. 242. 1.).

Oder weil $AD = DG$, daher $AB = 2AD + BG$ ist, so folgt $AD = \frac{AB - GB}{2} = \frac{AB}{2} - \frac{BG}{2}$. Wenn man endlich von der Grundlinie AB den kleinern Abschnitt AD abzieht, so ergibt sich der größere BD. Da nun in dem rechtwinkeligen ADC die Seiten CA und AD bekannt sind, so findet man die Höhe $DC = \sqrt{CA^2 - AD^2} = \sqrt{(CA + AD)(CA - AD)}$. (Rk. 157. 4.)

Es habe z. B. auf einem Maßstabe die Seite $CA = 107$, $BC = 162$ und $AB = 231$, so findet man, wenn diese Werthe in die obige Proportion gesetzt werden, die Differenz der Abschnitte $BD - AD = BG = \frac{269 . 55}{231} = 64,05$; folglich ist der Abschnitt $AD = \frac{231}{2} - \frac{64}{2} = \frac{167}{2} = 83,475$, und endlich die Höhe $DC = \sqrt{(107 + 83,5)(107 - 83,5)} = \sqrt{(190,5 . 23,5)} = 66,9$.

a) Da sowohl in einem gleichseitigen als auch gleichschenkeligen Dreyecke die Abschnitte auf der Grundlinie einander gleich sind (§. 57.), so kann in diesen Fällen die Höhe des Dreyeckes ebenfalls sehr leicht gefunden werden.

III. Von der Theilung des Kreises.

§. 98.

Die Theilung einer Kreislinie in jede verlangte Anzahl gleicher Theile kann in ihrer ganzen Allgemeinheit nach Gründen der Elementar-Geometrie, die nur den Gebrauch des Zirkels und des Lineals zuläßt, (§. 12.) nicht vollführt werden. Nur folgende geometrische

Theilungen des Kreises, wovon die Theilung in sechs gleiche Theile Fig. die einfachste ist, sind bis jetzt bekannt.

§. 99.

Aufgabe. Einen Kreis in sechs gleiche Theile zu theilen und 59. sodann die übrige davon abhängende Theilung anzugeben.

Auflösung. 1) Nachdem der Umfang des Kreises beschrieben ist, ziehe man einen Durchmesser *AD* und trage aus seinen Endpuncten *A* und *D* den unveränderten Halbmesser auf dem Umfange links und rechts ein Mahl auf; so ist dieser dadurch in sechs gleiche Theile getheilt (§. 73.). Verbindet man diese Puncte vermittelst Sehnen, so entsteht ein regelmäßiges, im Kreise eingeschriebenes Sechseck (§. 72. 3.). Wenn man die Endpuncte jeder zwey nebenliegenden Sehnen mittelst Geraden verbindet, so entsteht ein regelmäßiges eingeschriebenes Dreyeck (§. 72. 3.). Führt man zu jeder Seite des eingeschriebenen Sechseckes eine Parallele, die den betreffenden Kreisbogen berühret, so entsteht ein regelmäßiges Sechseck, welches dem Kreise umgeschrieben ist (Fig. 67.).

2) Theilet man jeden, von der Sechseckseite abgeschnittenen Bogen in zwey gleiche Theile (§. 40. 3.), so wird der Kreis in 12, und bey fortgesetzter Halbirung, der Bogen in 24, 48, 96,..... gleiche Theile getheilt.

a) Obige Ein- und Umschreibung der regelmäßigen Vielecke kann erforderlichen Falles bey jeder Kreistheilung auf die eben besagte Art geschehen, welches hier ein für alle Mahl erinnert wird.

§. 100.

Aufgabe. Einen Kreis in vier gleiche Theile zu theilen, 63. und die übrigen davon abhängenden Theilungen anzugeben.

Auflösung. 1) Man ziehe in dem Kreise einen Durchmesser *AB*, beschreibe aus seinen Endpuncten Kreisbogen, die sich wo möglich außerhalb des Kreises schneiden, verbinde diese Durchschnittspuncte, so wird der Kreis durch zwey senkrechte Durchmesser in vier gleiche Theile, die man Quadranten nennt, getheilt seyn, vermög §. 26. 1) und 72. 3).

2) Durch die Halbirung eines jeden 4tel Kreises, wird der Umkreis in 8, sodann in 16, 32, 64.... gleiche Theile getheilt.

Fig. §. 101.

60. Aufgabe. Einen Kreis in zehn gleiche Theile zu theilen, und die davon abhängenden Theilungen anzugeben.

Auflösung. 1) Man theile den Halbmesser des Kreises vermög §. 91. 2) in das mittlere und äußere Verhältniß, so läßt sich der größere Theil CM des Halbmessers auf dem Umkreise zehn Mahl auftragen, folglich ist dieser dadurch in zehn gleiche Theile getheilt.

Denn man ziehe die Sehne AB, und verbinde ihren Endpunct B mit dem Theilungspunct C und mit dem Mittelpunct M, so haben die Dreyecke MAB und CAB den Winkel q gemein; und da vermög der Construction $AC : CM = CM : AM$, oder wenn man für $CM = AB$ setzt, $AC : AB = AB : AM$ Statt findet, so stehen die Seiten dieser Dreyecke, welche den gleichen Winkel q einschließen, in Proportion; folglich sind sie ähnlich (§. 81.). Nun aber ist das Dreyeck MAB gleichschenkelig, also ist es auch sein ähnliches (§. 63. 2.); es sind daher die Winkel $q = p + m$, und $q = r$; folglich sind in diesen Dreyecken auch die dritten Winkel $p = n$. Da ferner die Seite $AB = BC = CM$ ist, so ist auch das Dreyeck MCB gleichschenkelig; folglich der Winkel $m = n$.

Es ist also $r = m + n = 2n$ (§. 54.)
und $q = p + m = r = 2n$,
da aber $n + q + (p + m) = 180°$ ist (§. 53.),
so ist auch $n + 2n + 2n = 180°$ (Rk. 40. II.),
nämlich $5n = 180°$;

daraus folgt der Mittelpunctswinkel $n = \frac{180}{5} = 36°$, oder der Bogen AB ist der zehnte Theil des ganzen Umkreises (§. 72. 3.).

2) Durch eine fortgesetzte Halbirung der Bogen, wird der Kreis in 20, 40, 80..... gleiche Theile getheilt.

61. 3) Verbindet man die Endpuncte A und B jeder zwey nebenliegende Seiten des Zehneckes durch Sehnen, so erhält man das regelmäßige Fünfeck. Es ist demnach der Mittelpunctswinkel $AMB = (p + q) + r = 36° + 36° = 72°$ (§. 72. 3.).

Man theile den Winkel $AMC = 36°$ in zwey gleiche Theile $p = q = 18°$, so steht $MD \perp AC$, und es ist $AD = DC$ (§. 39); also decken sich die rechtwinkeligen Dreyeck DEA und DEC (§. 23. 1.), und es ist der Winkel $m = n$. Aus gleichem Grunde ist das rechtwinkelige Dreyeck $AFC = BFC$, daher der Winkel $m = o$; folglich auch der Winkel $n = o$. Und da die Dreyecke CEA und ABC überdieß den Winkel m gemein haben, so sind

auch die dritten Winkel $AEC = ACB$; folglich diese Dreyecke ähnlich (§. 59.); Fig. 61

$$\text{also verhält sich } AE : AC = (CB = AC) : AB,$$

$$\text{daraus folgt } AE = \frac{AC^2}{AB}.$$

Ferner ist im gleichschenkeligen Dreyecke AMB der Winkel $w = u$, und überhaupt $w + u + AMB = 180°$. Nun aber ist der Winkel $AMB = 72°$, also ist $w + u = 180° - 72° = 108°$; folglich ist $w = u = \frac{108}{2} = 54°$. Da aber auch der Winkel $EMB = r + q = 36° + 18° = 54°$ ist, so ist der Winkel $u = r + q$. Überdieß haben die Dreyecke ABM und EBM den Winkel u gemein, also sind auch die dritten Winkel $x = AMB$; folglich diese Dreyecke ähnlich;

$$\text{daher verhält sich auch } EB : BM = (AM = BM) : AB$$

$$\text{daraus folgt } EB = \frac{BM^2}{AB}$$

$$\text{und vermög Vorigen ist } AE = \frac{AC^2}{AB}$$

$$\text{also auch } AE + EB = \frac{AC^2}{AB} + \frac{BM^2}{AB} \text{ (Rk. 47. I.)}$$

$$\text{oder } AB = \frac{AC^2 + BM^2}{AB}$$

$$\text{endlich ist } AB^2 = AC^2 + BM^2;$$

das heißt: das Quadrat der regelmäßigen Fünfeckseite ist eben so groß, als die Quadrate der regelmäßigen Zehneckseite und des zugehörigen Halbmessers zusammen genommen; sie schließen daher ein rechtwinkeliges Dreyeck ein, wobey die Fünfeckseite die Hypothenuse, die Zehneckseite und der Halbmesser aber die Katheten bilden (§. 88.).

4) Es kann daher durch eine einfache geometrische Verzeichnung in einem Kreise die regelmäßige Fünfeck- und Zehneckseite mit einem Mahle bestimmt werden.

Zu diesem Ende errichte man auf dem Durchmesser FN einen senkrechten Halbmesser MC, theile einen Halbmesser, z. B. FM in zwey gleiche Theile, und beschreibe aus dem Theilungspuncte H mit dem Halbmesser HC den Bogen CdG; so ist die Sehne CG dieses Bogens die regelmäßige Fünfeckseite, MG aber die regelmäßige Zehneckseite. 62.

Fig. 62.

$$\text{Denn es ist } HC^2 = CM^2 + MH^2, \text{ vermög Construct.}$$
$$\text{oder } HC^2 = MN^2 + MH^2$$
$$(HM + MG)^2 = MN^2 + (\tfrac{1}{2}MN)^2$$
$$(\tfrac{1}{2}MN + MG)^2 = MN^2 + \tfrac{1}{4}MN^2$$
$$\tfrac{1}{4}MN^2 + MN.MG + MG^2 = MN^2 + \tfrac{1}{4}MN^2$$
$$MG^2 = MN^2 - MN.MG = MN(MN - MG)$$
$$MG^2 = MN.GN; \text{ daraus folgt}$$

endlich $GN : MG = MG : MN$. Es ist also der Halbmesser MN in das mittlere und äußere Verhältniß getheilt (§. 91. 2.); folglich der größere Theil MG desselben, die regelmäßige Zehneckseite (§. 101. 1.). Da nun diese Seite und der Halbmesser MC die Katheten des rechtwinkeligen Dreyeckes sind, so muß die Hypothenuse CG die regelmäßige Fünfeckseite seyn, vermöge des Obigen in 3).

§. 102.

Aufgabe. Einen Kreis in fünfzehn gleiche Theile zu theilen, und die davon abhängende Theilung anzugeben.

56. Auflösung. 1) Man trage den Halbmesser des Kreises und auch die regelmäßige Zehneckseite als Sehnen von P bis Q, und von P bis N, so ist der Bogen QN der fünfzehnte Theil des ganzen Umkreises.

Denn es ist der Bogen $QN = PNQ - PN = 60° - 36° = 24° = \frac{360°}{15}$; folglich läßt sich die Sehne QN auf den Umfang des Kreises 15 Mahl auftragen.

2) Durch eine fortgesetzte Halbirung der Bogen wird der Kreis ferner in 30, 60, 120 ..... gleiche Theile getheilt.

IV. Anwendung der Kreistheilung auf die Winkel-Meßinstrumente.

§. 103.

Die wesentlichste und in der Ausübung bisher gebräuchlichste Theilung des Kreises ist die in 360 gleiche Theile oder Grade, die jedoch nur zum Theil geometrisch vollführt werden kann. Zu diesem Ende theile man

63. 1) Den Umkreis durch zwey senkrechte Durchmesser AB und CD in vier gleiche Theile (§. 100.), deren jeder $= 90°$ ist.

2) Aus ihren Endpuncten A, D, B und C ziehe man mit dem Halbmesser des Kreises, die Kreisbogen EMF, GMH, IMK und

LMN, so ist dadurch der Umkreis in 12 gleiche Theile getheilt, deren jeder 30° enthält. Fig. 63.

Denn es ist der Bogen $AHE = 60°$ vermög §. 73.; also ist der Bogen $CE = CEHA - EHA = 90° - 60° = 30°$. Desgleichen ist der Bogen $AH = 30$; folglich auch $HE = 30°$; u. s. w.

3) Theilet man jeden dieser Bogen in zwey gleiche Theile, so ist der Umkreis von 15 zu 15 Grade eingetheilt.

4) Theilet man ferner jeden solchen Bogen durch das Versuchen in fünf gleiche Theile, so ist der Umkreis von 3 zu 3 Grade; und wird endlich jeder dieser Bogen sofort in drey gleiche Theile getheilt, so ist der ganze Umkreis in die einzelnen Grade abgetheilt. Und nun könnte man weiter die einzelnen Grade in Halbe- oder Viertelgrade eintheilen.

§. 104.

Aufgabe. Bey genauen mathematischen Winkel-Meßinstrumenten ist es erforderlich, auch kleinere Theile eines Grades anzugeben (wozu ein sehr großer Kreis erforderlich wäre, besonders wenn man auf dem eingetheilten Rande oder Gradbogen, der auch Limbus genennt wird, noch kleinere Theile eines Grades, als z. B. 4tel Grade sind, anbringen wollte), es soll bestimmt werden, wie man diese kleinern Theile eines Grades durch Hülfe des sogenannten Verniers oder Nonius anzugeben habe.

Auflösung. 1) Es sey *AB* ein Stück des Limbus von einem Winkelmesser, der schon in gewisse beliebige einzelne gleiche Theile getheilt ist, *C* sey ein Stück des um den Mittelpunct des Instrumentes beweglichen Lineals, oder Kreisbogen (Alhidaden-Regel) und pq ein am Ende des Lineals schief zugeschliffener, oder mit *AB* in einerley Ebene liegender Bogen, der sich mit dem Lineale um den Mittelpunct des Instrumentes drehen läßt. Faßt man nun mit dem Zirkel von dem Gradbogen oder Limbus n Theile, überträgt diese auf den Bogen pq, und theilet sie hier in $n + 1$ gleiche Theile, so heißt ein so eingetheilter Bogen der Vernier oder Nonius, und es ist ein Theil des Nonius um eine gewisse Differenz $= d$ kleiner, als ein Theil des Limbus (Rk. 72. II.). 64. und 65.

Es sey ferner der Werth eines Theiles auf dem Limbus in Minuten oder Secunden ausgedrückt, überhaupt $= a$, und ein Theil auf dem Nonius $= b$; so sind n Theile des Limbus eben so groß, als $n + 1$ Theile des Nonius, es ist nämlich 64.

Fig. 64. $a.n = b(n+1)$; hieraus findet man $b = \frac{an}{n+1}$

und endlich ist $a - b = d = a - \frac{an}{n+1} = \frac{an + a - an}{n+1} = \frac{a}{n+1} =$ dem Unterschiede, um welchen ein Theil des Nonius kleiner ist, als ein Theil des Limbus. Hat man z. B. den Limbus in einzelne Grade getheilt, und 5 derselben auf den Nonius übertragen, und da in $5 + 1 = 6$ gleiche Theile getheilt; so ist $a = 1° = 60'$, und $b = \frac{5 \cdot 60}{6} = 50'$; folglich $a - b = d = 60 - 50 = 10' = \frac{60'}{6}$ das heißt: will man bey einem Winkelmesser die Winkel bis auf den 6ten Theil eines Grades, oder von 10 zu 10 Minuten bestimmen; so trage man 5 Grade vom Limbus auf den Nonius über, man mache nämlich den Bogen $pq = 5°$, theile ihn in 6 gleiche Theile, und setze die Ziffern dazu, wie sie in der Figur zu sehen sind; so wird man dadurch im Stande seyn, den 6ten Theil eines Grades zu bestimmen, oder die Winkel von 10 zu 10 Minuten zu messen.

Denn stellt man das bewegliche Lineal C dergestalt, daß der Nullpunct des Nonius mit einem Theilstriche des Limbus, z. B. mit 11° genau übereinstimmt; so wird der Mittelpuncts-Winkel, welchen nämlich der Anfangspunct der Limbustheilung oder der Nullpunct desselben, und der Nullpunct des Nonius mit dem Mittelpunct des Instrumentes bildet, = 11° seyn, und kein einziger Theilstrich des Nonius wird, außer dem letzten q, mit den Theilstrichen des Lymbus übereintreffen, sondern es wird der Strich 10 des Nonius vom Striche 12 des Limbus um $\frac{1}{6}$ Grad = 10 Minuten, der Strich 20, vom 13. Grad um $\frac{2}{6}$ Grad = 20 Minuten, der Strich 30, vom 14. Grad um $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ Grad = 30 Minuten entfernt seyn, u. s. f. Weil nämlich 6 Theile des Nonius um 1 Grad = 60 Minuten kleiner sind, als sechs Grade des Limbus; so muß ein Theil des Nonius um $\frac{1}{6}$ Grad = 10 Minuten, zwey Theile um 20 Minuten, drey Theile um 30 Minuten kleiner seyn, als 1, 2 oder 3 Grade des Limbus, u. s. w. Wenn man demnach das Lineal so weit fortrückt, daß der Theilstrich 10 des Nonius mit dem 12ten Grade des Limbus genau übereinstimmt; so wird der Nullpunct des Nonius um 10 Minuten von dem 11ten Grade des Limbus weiter fortgerückt, und der Mittelpunctswinkel = 11° 10′ seyn; und würde bey weiterer Fortrückung des Lineals der Theilstrich 20 mit dem 13ten Grade übereinstimmen, so wäre der Nullpunct des Nonius um 20 Minuten von dem 11ten Grade des Limbus entfernt; folglich sodann der Mittelpunctswinkel = 11° 20′, u. s. f.

2) Hat man einen Bogen von n gleichen Theilen des Limbus auf den Nonius pq übertragen, und hier in $n - 1$ gleiche Theile getheilt (Fig. 65.); so ist in diesem Falle ein Theil des Nonius um eine gewisse Differenz $= d$ größer, als ein Theil des Limbus, es wird nämlich seyn $an = b(n-1)$, und $b = \frac{an}{n-1}$; daher $b - a = d = \frac{an}{n-1} - a = \frac{an - an + a}{n-1} = \frac{a}{n-1} =$ dem Unterschiede, um welchen ein Theil des Nonius größer als ein Theil des Limbus ist. Man kann daher Fig. 65.

3) in beyden Fällen folgenden allgemeinen Ausdruck für die Differenz der Limbus- und Noniustheilung setzen:

$d = \frac{a}{n \pm 1}$, in welchem das obere Zeichen $+$ für den 1) Fall, das untere Zeichen — aber für den 2) Fall zu nehmen ist; in beyden Fällen zeigt a jedes Mahl die Theile in Minuten oder Secunden an, in welche der Rand des Limbus zu theilen ist, und n gibt die Anzahl dieser Theile zu erkennen, welche vom Limbus auf den Nonius zu übertragen, und da entweder in $n + 1$ oder $n - 1$ gleiche Theile zu theilen sind; folglich zeigt der Nenner dieses Bruches überhaupt an, in wie viel gleiche Theile der vom Limbus auf den Nonius übertragene Bogen, oder dessen Theile daselbst getheilt werden müssen. Es muß jedoch dieser Nenner $n \pm 1$ eine solche Zahl seyn, daß der Zähler a durch selbe jedes Mahl genau ohne Rest theilbar ist. 64. und 65.

4) Man kann den Werth von n leicht finden, wenn sowohl die Eintheilung auf dem Limbus, als auch die Unterabtheilungen eines Grades in Minuten oder Secunden bekannt sind, die durch den Nonius bestimmt werden sollen. Denn aus der Gleichung $d = \frac{a}{n \pm 1}$ folgt $n = \frac{a \mp d}{d}$. Ist z. B. auf dem Rande des Limbus jeder einzelne Grad noch in drey gleiche Theile, mithin von 20 zu 20 Minuten abgetheilt, und man verlangt, daß der Nonius die Winkel von 2 zu 2 Minuten bestimmt angebe, und zwar: daß nach 1) jeder Theil des Nonius kleiner ist, als ein Theil des Limbus; so ist in diesem Falle $a = 20'$ und $d = 2$, daher $n = \frac{20-2}{2} = 9$; es sind demnach 9 Theile des Limbus auf dem Nonius in $n + 1 = 10$ gleiche Theile zu theilen, wodurch $d = \frac{20}{9+1} = \frac{20}{10} = 2'$ wird, weil hier die obern Zeichen zu nehmen sind.

Fig. 64. und 65. Eben so findet man, wenn der Rand des Limbus von 15 zu 15 Minuten abgetheilt ist, und man verlangt, daß der Nonius die Winkel von 30 zu 30 Secunden bestimmen soll, und zwar: daß nach 2) ein Theil des Nonius größer, als ein Theil des Limbus sey, den Werth von $n = \frac{15 + 30}{30} = \frac{15 . 60 + 30}{30} = 31$ Limbustheile, die auf dem Nonius in $n - 1 = 31 - 1 = 30$ gleiche Theile zu theilen sind, um $d = \frac{15 . 60}{31 - 1} = \frac{900}{30} = 30''$ zu erhalten; und so ähnlich in andern Fällen.

a) Wenn man n Theile des Limbus auf den Nonius überträgt, und sie da in $n - 1$ gleiche Theile theilet, daher ein solcher Theil größer, als ein Theil des Limbus ist, so muß man die Zahlen, welche die Unterabtheilungen auf dem Nonius bezeichnen, nach der entgegengesetzten Ordnung setzen, als die Zahlen der Grade auf dem Limbus stehen, wie dieß bey dem Nonius pq (Fig. 65.) zu sehen, und bey einigem Nachdenken der Grund leicht einzusehen ist. Bey einer solchen Eintheilung pflegt man zu sagen: der Nonius trägt vor; so wie man bey der andern Eintheilung Fig. 64. zu sagen pflegt: der Nonius trägt nach. Weil man bey dieser letztern Eintheilung des Nonius die Unterabtheilungen der Grade nach der nämlichen Ordnung, wie auf dem Limbus die ganzen Grade zählen kann; so pflegt man gewöhnlich (wenn nicht besondere Umstände jene Eintheilung fordern) diese Eintheilung des Nonius zu gebrauchen.

§. 105.

Bey solchen Winkelmessern, mit welchen man nebst den Horizontal-Winkeln auch Höhen- und Tiefenwinkel messen muß, ist ein Bogen angebracht, der auf dem horizontalen Kreis oder dem Limbus des Instrumentes senkrecht stehet, und an welchem sich auch ein Nonius, oder bey feststehenden Nonien ein Kreis- oder Limbusbogen vertical auf- und abwärts bewegen läßt.

66. Es sey nun ED ein Stück eines solchen vertical stehenden Bogens, bey welchem jeder einzelne Grad noch in 2 gleiche Theile, folglich in halbe Grade abgetheilt ist, F sey ein Stück des um den Mittelpunct des Bogens ED beweglichen Lineals, vw ein am Ende des Lineals schief zugeschliffener Bogen, der sich mit dem Lineale bewegt. Verlangt man nun mit diesem Instrumente die Höhen- und Tiefenwinkel von 5 zu 5 Minuten zu bestimmen, und daß nach (§. 104. 1.) ein Theil auf dem Nonius kleiner, als ein Theil des Limbus wird; so ist für diesen Fall $n = \frac{30 - 5}{5} = 5$ Limbustheile. Man trage nämlich 5 Theile des Limbus auf den Bogen des Nonius aus dem Null-

puncte rechts und links bis w und v auf, theile jeden dieser Bogen in 6 gleiche Theile, und setze die Ziffern dazu, wie sie in der Figur zu sehen sind; so wird man dadurch im Stande seyn, die Winkel von 5 zu 5 Minuten zu bestimmen; indem $d = \frac{a}{n \pm 1} = \frac{30}{5+1} = 5'$ ist. Fig. 66.

Denn, wenn z. B. der Nullpunct des Nonius auf den Nullpunct des Limbus gestellt ist, so wird der Strich 5 des Nonius von dem ersten halben Grade des Limbus um $\frac{1}{6}$ eines halben Grades, oder $\frac{1}{12}$ eines ganzen Grades $= 5$ Minuten; der Strich 10 von dem zweyten halben, oder ersten Grad um $\frac{2}{6}$ eines halben, oder $\frac{2}{12}$ eines ganzen Grades $= 10$ Minuten, entfernt seyn, u. s. w. Würde man demnach den Nonius so weit gegen D herabrücken, daß der Strich 15 des Nonius mit dem 3ten Theilstrich des Limbus (unterhalb des Nullpunctes) genau übereinstimmt; so wird der Nullpunct des Nonius von dem Nullpuncte des Limbus um 15 Minuten weiter herab gerückt, und der Tiefenwinkel $= 15'$ seyn u. s. f. Ganz auf diese Weise verhält es sich auch mit der Fortrückung des Nonius aufwärts, wenn man einen Höhenwinkel beobachtet.

§. 106.

Wenn man sich erinnert, daß §. 104 unter 3) in dem allgemeinen Ausdrucke $d = \frac{a}{n \pm 1}$, der Zähler a jederzeit die Theile auf dem Rande des Limbus in Minuten oder Secunden ausgedrückt vorstellet, der Nenner $n \pm 1$ aber jedes Mahl die Anzahl der Theile, welche auf den Nonius von dessen Nullpunct rechts oder links getragen sind, bedeutet; so geht daraus hervor, daß man bey jedem schon eingetheilten Instrumente den Werth der **Noniustheilung**, das ist, die Unterabtheilungen eines Grades, in welchen der Nonius die Winkel angibt, sehr leicht bestimmen, und hierzu folgende allgemeine Regel aufstellen kann.

1) **Man drücke den Werth einer Abtheilung des Limbus in Einheiten der Minuten oder Secunden aus.**

2) **Die auf solche Art erhaltene Anzahl der Minuten oder Secunden dividire man durch die Anzahl der Theile des Nonius** (wenn diese Theile von dem Nullpunct des Nonius nur auf eine Seite, d. i. entweder rechts oder links wie bey pq getragen worden sind); **so wird der Quotient den Werth der Noniustheilung in eben solchen Einheiten** angeben. Sind aber die Theile des Nonius von seinem Nullpuncte 64. und 65.

Fig. 66. rechts und links getragen worden, wie bey *vw*; so wird nur die halbe Anzahl dieser Theile, das ist, diejenigen, welche vom Nullpuncte des Nonius entweder rechts oder links sich befinden, zum Divisor genommen (§. 105.). Es betrage z. B. jede Abtheilung auf dem Limbus 30 Minuten, und der Nonius habe 15 Theile, die, wie bey *pq*, vom Nullpuncte aus nur auf eine Seite getragen sind; so ist (vermög §. 104. 1.) $d = \frac{a}{n+1} = \frac{30}{15} = 2' =$ dem Werthe der Noniustheilung. Desgleichen, hat der Nonius 10 Theile; so wird er $\frac{30}{10} = 3$ Minuten geben; u. s. f. Ist jeder Grad des Limbus in 4 gleiche Theile, mithin von 15 zu 15 Minuten eingetheilt, und hat der Nonius in Allem 30 Theile, die aber von dem Nullpuncte zu beyden Seiten, wie bey *vw* getragen sind; so ist $\frac{15}{15} = 1' =$ dem Werthe der Noniustheilung. Wäre der Limbus von 10 zu 10 Minuten eingetheilt, und der Nonius hat in Allem 60 Theile; so ist $10 : 60 = \frac{10 . 60''}{60} = 10''$ der Werth der Noniustheilung u. s. w.

a) Daß auch bey geradlinigen Maßstäben die Unterabtheilungen der Haupttheile, z. B. der Zolle u. dgl. eben so vermittelst des Nonius bestimmt werden können, bedarf wohl kaum einer Erinnerung; es gilt nämlich für geradlinige Nonien dieselbe Gleichung $d = \frac{a}{n \pm 1}$ und $n = \frac{a \mp d}{d}$ wie oben.

Fünfter Abschnitt.

Eigenschaften der ähnlichen Vielecke.

§. 107.

Fig. 68. Vielecke, z. B. *ABCDEFG* und *abcdefg*, heißen ähnlich, wenn sie gleich viele Polygon-Winkel enthalten, die einander wechselweise gleich sind, durch gleichliegende Diagonalen, oder durch andere gleichliegende gerade Linien in ähnliche Dreyecke zertheilt werden können; folglich alle diese gleichliegenden Geraden einander proportional sind.

Aus dieser Erklärung folgt:

1) Daß alle regelmäßigen Vielecke von einerley Gattung (z. B. alle regelmäßigen Fünfecke, Siebenecke u. s. w.) einander ähnlich sind.

Denn sie können durch gerade Linien, die man aus ihren Mittelpuncten in die Spitzen der Vieleckswinkel zieht, in ähnliche Dreyecke zertheilt werden (§. 72. 2.). Fig. 68.

2) Jede zwey Seiten des einen Vieleckes stehen mit den gleichliegenden zwey Seiten des andern ähnlichen Vieleckes in Proportion; z. B. $AB:BC = ab:bc$, oder $bc:ca = BC:CA$. Dieses erhellet aus der Ähnlichkeit der Dreyecke abc und ABC.

§. 108.

An ähnlichen Vielecken stehen diejenigen Seiten, welche am Umfange gleiche Winkel einschließen, in Proportion.

Denn es verhält sich $\left.\begin{array}{l} ac : bc = AC : BC \\ \text{und } ac : cd = AC : CD \end{array}\right\}$ (§. 77.);

folglich auch $bc : cd = BC : CD$ (Rk. 270. 1.).

§. 109.

Die Umfänge der ähnlichen Vielecke verhalten sich so gegen einander, wie sich jede Seite des ersten zur gleichliegenden Seite des andern Vieleckes verhält.

Denn vermöge des Vorigen §. 108. verhält sich:

$$\left.\begin{array}{ll} ab:bc = AB:BC; & \text{oder } ab:AB = bc:BC \\ bc:cd = BC:CD; & \text{„ } bc:BC = cd:CD \\ cd:de = CD:DE; & \text{„ } cd:CD = de:DE \end{array}\right\} \text{(Rk. 268. 1.)}$$

u. s. w.

daher auch $ab:AB = bc:BC = cd:CD = de:DE \ldots$ (Rk. 249.)

folglich $(ab + bc + cd + \ldots) : (AB + BC + CD + \ldots)$

$$\left.\begin{array}{l} = ab : AB \\ = bc : BC \\ = de : DE \end{array}\right\} \text{(Rk. 271.)}$$

§. 110.

Die Umfänge der regelmäßigen Vielecke von einerley Gattung verhalten sich gegen einander, Fig. 69.

1) wie die Halbmesser, oder Durchmesser der herumgeschriebenen Kreise; und auch

2) wie die Halbmesser oder Durchmesser der eingeschriebenen Kreise.

Fig. 69. **Beweis zu 1).** Es sey der Winkel $amb = AMB$, mithin ab und AB Seiten regelmäßiger Vielecke von einerley Gattung (§. 72. 2), am und AM aber die Halbmesser der herumgeschriebenen Kreise; ferner sey der Kürze wegen der Umfang des ersten Vieleckes $= u$, und der Umfang des zweyten $= U$; so findet an den ähnlichen Dreyecken amb und AMB (§. 63.) die Proportion

$AM : AB = am : ab$ Statt . . . . . . (A)

Nun ist $U : u = AB : ab$ vermög §. 109.

folglich auch $U : u = AM : am = 2AM : 2am$.

Aus der Proportion (A) erhellet auch zugleich, **daß sich Sehnen von ähnlichen Bogen** (Bogen von einer gleichen Anzahl der Grade) **wie ihre Halbmesser verhalten.**

Beweis zu 2). An den ähnlichen Dreyecken amc und AMC verhält sich $AM : MC = am : mc$

und $AM : AB = am : ab$

daher $AB : MC = ab : mc$

und $U : u = AB : ab$ vermög Vorigem unter 1)

folglich verhält sich $U : u = MC : mc$.

§. 111.

Betrachtet man die Umfänge der Kreisflächen als regelmäßige Vielecke von einer unendlichen Anzahl der Seiten, so sieht man leicht ein, daß hier die Seiten und Bogen über einander fallen, und die Senkrechten mq und MQ, die man auf eine solche unendlich kleine Seite ED fället, dem Halbmesser des Kreises selbst gleich sind.

1) **Es verhalten sich demnach die Umfänge der Kreise eben so gegen einander, wie ihre Halbmesser, oder wie ihre Durchmesser;** wenn man nämlich den Umfang des kleinern Kreises $= u$, und den Umfang des größern $= U$ setzt,

so verhält sich $U : u = MQ : mq$ vermög §. 110. 2)

oder $U : u = 2MQ : 2mq = PQ : pq$.

2) **Auch verhalten sich ähnliche Bogen von verschiedenen Kreisen, oder Kreisbogen von ähnlichen Ausschnitten in Hinsicht auf ihre wirkliche Länge** (wenn man sie in eine gerade Linie ausgespannt denkt) **so gegen einander, wie ihre Halbmesser oder Durchmesser.**

Es sey der Winkel $AMB = amb = n$ Grade, so verhält Fig. 69.

$$\left.\begin{array}{l}\text{sich der Bogen } acb : \quad u = n^\circ : 360^\circ \\ \text{und auch } ANB : \quad U = n^\circ : 360^\circ\end{array}\right\} (\S.\ 16.);$$

daher auch $ANB : acb = U : u$

nun ist $MQ : mq = U : u$ verm. des Vorigen,

folglich auch $ANB : acb = Mq : mq = PQ : pq$.

3) Vermöge des Vorigen verhalten sich

die Bogen $ANB : acb = Mq : mq$

oder $ANB : acb = AM : am$ (Rk. 40. Grundf. II.).

Ferner $AM : AB = am : ab$ (vermög §. 110 in A)

folglich auch $ANB : acb = AB : ab$; das heißt ähnliche Bogen von verschiedenen Kreisen verhalten sich in Hinsicht auf ihre wirkliche Länge, wie ihre Sehnen.

a) Das hier Gesagte erhellet auch schon aus der Entstehungsart des Kreises (§. 11.), weil alle Kreise einander ähnlich sind; denn sie sind auf gleiche Art bestimmt, und bloß in Hinsicht auf Größe von einander unterschieden (§. 58.).

§. 112.

Da alle Kreise ähnlich sind, und ihre Umfänge sich verhalten, wie ihre Halbmesser oder Durchmesser, so ist es leicht, zu dem bekannten Durchmesser eines Kreises seinen Umfang, oder umgekehrt zu finden, wenn einmahl das Verhältniß des Durchmessers zum Umfange Eines Kreises in Zahlen bekannt ist. Zum Behufe der Ableitung dieses Verhältnisses, kann folgende dienliche Gleichung aufgestellt werden; wenn nämlich der Halbmesser $AM =$ 61.
$CM = BM = h$ *) eines Kreises, und die Sehne $AB = b$ eines Bogens ACB gegeben ist, so findet man daraus die Sehne AC des halben Bogens ADC durch die allgemeine Gleichung

$$AC = \sqrt{2h^2 - h\sqrt{4h^2 - b^2}}.$$

Denn im rechtwinkeligen Dreyecke AFM ist $MF = \sqrt{(AM^2 - AF^2)} = \sqrt{(h^2 - \frac{1}{4}b^2)}$; weil $AF = \frac{1}{2}b$, mithin $AF^2 = \frac{1}{4}b^2$ ist. Ferner ist $FC = CM - MF = h - \sqrt{(h^2 - \frac{1}{4}b^2)}$; daher ist auch $FC^2 = h^2 - 2h\sqrt{(h^2 - \frac{1}{4}b^2)} + h^2 - \frac{1}{4}b^2 = 2h^2 - \frac{1}{4}b^2 - 2h\sqrt{(h^2 - \frac{1}{4}b^2)}$.

*) Man sehe die Note §. 91.

Fig. 61. Im rechtwinkeligen Dreyecke AFC ist $AC^2 = AF^2 + FC^2$ $= \frac{1}{4}b^2 + 2h^2 - \frac{1}{4}b^2 - 2h\sqrt{(h^2 - \frac{1}{4}b^2)} = 2h^2 - 2h\sqrt{\left(\frac{4h^2 - b^2}{4}\right)}$ $= 2h^2 - h\sqrt{(4h^2 - b^2)}$; folglich ist $AC = \sqrt{2h^2 - h\sqrt{(4h^2 - b^2)}}$.

Da z. B. an einem regelmäßigen Sechsecke die Seite $b = h$, nämlich dem Halbmesser gleich ist (§. 73.); so ist, wenn man h in dieser Gleichung anstatt b setzet, die Seite des regelmäßigen 12 eckes $= \sqrt{2h^2 - h\sqrt{(4h^2 - h^2)}} = \sqrt{2h^2 - h\sqrt{3h^2}} =$ $\sqrt{2h^2 - h^2\sqrt{3}} = \sqrt{h^2(2 - \sqrt{3})} = h\sqrt{2 - \sqrt{3}}$. Setzt man diesen Werth $h\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ für b in die obige Formel, so erhält man nach gehöriger Reduction die Seite des regelmäßigen 24 eckes $= h\sqrt{2 - \sqrt{(2 + \sqrt{3})}}$. Und setzet man diesen Werth wieder in die obige Gleichung anstatt b, so erhält man die Seite des regelmäßigen

48 eckes $= h\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}$; hierauf des

96 eckes $= h\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}$; des

192 eckes $= h\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}} =$ $h \times 0{,}032723$;

u. s. w. nach diesem Gesetze.

§. 113.

Wenn man in einem Kreise verschiedene regelmäßige Vielecke
62. einschreibt, so kommt der Umfang derselben dem Umkreise immer näher, je größer die Anzahl ihrer Seiten wird; so z. B. ist (Fig. 62.) der Umfang des Zehneckes schon nicht mehr so viel, als der Umfang des Fünfeckes von dem Umkreise verschieden; und so würde das Zwanzigeck dem Umkreise wieder viel näher kommen, als das Zehneck u. s. f.; endlich würde man ein solches Vieleck erhalten, dessen Seiten mit dem Umfange des Kreises fast übereinfielen. Auf eben diese Art werden auch die umgeschriebenen regelmäßigen Vielecke sich dem Umkreise immer mehr nähern, je größer die Anzahl ihrer Seiten wird.

Daher ist der Umfang des eingeschriebenen Vieleckes von einer so großen Anzahl Seiten, daß Sehnen und Bogen beynahe über einander fallen, nur um etwas sehr Weniges kleiner,

als der Umfang des Kreises; hingegen der **Umfang des umgeschriebenen** Vieleckes von eben so viel Seiten, nur um etwas sehr Weniges **größer**, als der Umfang des Kreises; welches man auch schon aus der Fig. 67. einsieht. Addirt man nun beyde Umfänge der gleichnamigen Vielecke, und theilet diese Summe durch 2, so erhält man sehr nahe den Umfang des Kreises. Fig. 67.

§. 114.

Aus diesen Betrachtungen folgt, daß man das Verhältniß des Durchmessers zu seinem Umkreise auf folgende Art durch eine Annäherung finden könne. Da nämlich die Seiten des eingeschriebenen regelmäßigen 192eckes mit den abgeschnittenen Bogen des Kreises schon sehr nahe zusammenfallen, so ist dasselbe zur Bestimmung dieses Verhältnisses um so zweckdienlicher, weil es aus der Seite des 6eckes, folglich aus dem Halbmesser berechnet werden kann. Man findet vermöge §. 112., wenn man eines Kreises Halbmesser $h = 10\,000\,000$ setzt, die eingeschriebene 192eckseite $= 10\,000\,000 \times 0{,}032723 = 327230$; daher ist der Umfang dieses Vieleckes $= 327230 \,.\, 192 = 62828160$.

Aus der eingeschriebenen 192eckseite $= AB = 327230$ findet man die umgeschriebene 192eckseite $EF = 327272$. Denn aus dem rechtwinkeligen Dreyecke MCB ist $MC = \sqrt{(MB^2 - CB^2)} = \sqrt{(h^2 - CB^2)} = \sqrt{[(h + CB)(h - CB)]} = 9998661{,}4$; wenn man für h und $CB = \frac{1}{2} AB$ die gehörigen Werthe setzt. In den ähnlichen Dreyecken MCB und MDF verhält sich $MC : CB = MD : DF$; daraus findet man $DF = \frac{CB.MD}{MC} = 163636$; und $2 \,.\, DF = EF = 327272$, wenn man die gehörigen Werthe substituirt; folglich ist der Umfang des umgeschriebenen 192eckes $= 327272 \,.\, 192 = 62836224$, und endlich der Umfang des Kreises $= (62828160 + 62836224) : 2 = 62832192$, vermög §. 113.

Da wir den Halbmesser $= h = 10\,000\,000$ angenommen haben, so ist der Durchmesser $= 2h = 20\,000\,000$, und daher das Verhältniß des Durchmessers zum Umkreise

wie 20000000 : 62832192 vermög (Rk. 247.),
oder 10000000 : 31416096 —— } (Rk. 253.)
oder 1 : 3,1416096 —— }
oder 1 : 3,14 —— (Rk. 123.)
oder auch 100 : 314 —— (Rk. 117. in 4) u. 253).

Fig. 67. das heißt: wenn der Durchmesser eines Kreises = 1 ist, so enthält der Umfang desselben etwas mehr als 3 solche Durchmesser; oder wenn der Durchmesser auf einem Maßstabe übertragen 100 Theile enthält, so hat der Umkreis, wenn man ihn in eine gerade Linie ausgespannt denkt, auf eben diesem Maßstabe 314 solche Theile.

§. 115.

Nach der Rechnung des Unendlichen hat man die Annäherung dieses Verhältnisses bis auf Einhundert sieben und zwanzig Decimalziffern getrieben. Behält man von diesen die ersten fünf Decimalstellen bey, als 1:3,14159 = 100000 : 314159 und kürzt dieses Verhältniß nach Rk. 127. ab; so erhält man das Verhältniß 113:355, welches noch schärfer als das obige ist; allein da das Verhältniß 100:314 in den meisten Fällen schon zureichende Schärfe hat; so nimmt man in der Ausübung, der bequemen Rechnung wegen, gewöhnlich dieses an. Sollte bey einer vorkommenden Rechnung eine größere Genauigkeit erforderlich seyn, so kann man von den folgenden Decimalstellen noch Eine, oder nach Umständen zwey Ziffern beybehalten, und das Verhältniß 1000:3141, oder auch 10000:31416, verbleibt in der Rechnung immer noch sehr bequem.

In der Folge werden wir das Verhältniß des Durchmessers zu seinem Umkreise mit 1 : π bezeichnen, das heißt: es wird jedes Mahl $\pi = 3,14159 \ldots\ldots$, oder auch $\pi = 3,14$ bedeuten.

§. 116.

69. 1. Aufgabe. Zu einem gegebenen Halbmesser $AM = h$ die Länge x des dazu gehörigen Umkreises zu finden.

Auflösung. Wegen des Halbmessers $= h$, ist der Durchmesser $= 2h$ (§. 13. 2.), und es verhält sich $100 : 314 = 2h : x$ (§. 114. u. 111. in 1.); daraus folgt die Länge $x = 2h . 3,14 =$ der Länge des Umkreises. Man findet demnach zu einem bekannten Halbmesser den dazu gehörigen Umkreis, wenn man den doppelten Halbmesser, oder den Durchmesser mit der Verhältnißzahl 3,14 multiplicirt. Es sey z. B. der Halbmesser $h = 107$ Schuh, so ist der Umkreis $x = 2 . 107 . 3,14 = 671,96$ Fuß $= 671' \, 11\frac{1}{2}''$ (Rk. 121.).

Umgekehrt wird zu einem gegebenen Umkreise $U = 566$ Schuh

z. B. der dazu gehörige Durchmesser x, oder Halbmesser $\frac{x}{2}$ gefunden, wenn man schließt: $314 : 100 = 566 : x$; daraus folgt der Durchmesser $x = \frac{566 \cdot 100}{314} = 180{,}25$ Fuß $= 180' \ 3''$. Man erhält also zu einem bekannten Umfange den dazu gehörigen Durchmesser eines Kreises, wenn man den gegebenen Umfang mit der umgekehrten Verhältnißzahl $\frac{100}{314}$ multiplicirt, oder durch 3,14 dividirt. Fig. 69.

2. Aufgabe. Es ist der Halbmesser $AM = h = 60$ Klaftern, und der Winkel AMB oder der Bogen $ANB = 61$ Grade gegeben, man soll die Länge x dieses Bogens finden.

Auflösung. Vermöge der vorigen Aufgabe findet man die Länge des Umkreises $= 2h \cdot 3{,}14 = 376{,}8$ Klaftern; und vermöge §. 16 verhält (Grade) $360 : 61 =$ (Klafter) $376{,}8 : x$; woraus man $x = \frac{61 \cdot 376{,}8}{360} = 63{,}85$ Kl. $= 63° \ 5' =$ der wirklichen Länge des Bogens ANB findet, wenn man sich diesen nämlich in eine gerade Linie ausgespannt vorstellet.

§. 117.

Wenn bey zwey ähnlichen Vielecken $abcdefg$ und $ABCDEFG$ eine Seite des einen mit der gleichliegenden Seite des andern Vieleckes parallel läuft; so sind auch alle übrige gleichliegende Linien der Vielecke mit einander parallel; wenn z. B. $ab \parallel AB$, und der Winkel $a = A$, $b = B$, $c = C$ ist, u. s. w.; so ist auch $bc \parallel BC$, $ac \parallel AC$, $cd \parallel CD$, u. s. f. 68.

Denn man zerlege die Vielecke durch gleichliegende Diagonalen in Dreyecke, so sind diese alle einander ähnlich (§. 107.); und da vermöge der Voraussetzung ab mit AB parallel ist; so sind in den Dreyecken abc und ABC die Seiten wechselweise mit einander parallel (§. 64. 2.); es ist nämlich $bc \parallel BC$ und $ac \parallel AC$. Da nun in den ähnlichen Dreyecken acd und ACD die Seite ac mit AC parallel ist; so ist auch $cd \parallel CD$, und $ad \parallel AD$ u. s. w.; folglich sind alle gleichliegenden Linien der beyden ähnlichen Vielecke mit einander parallel.

Daraus folgt, daß auch umgekehrt zwey Vielecke einander ähnlich sind, wenn alle gleichliegenden Linien wechselweise mit einander parallel laufen (§. 64. 1.).

§. 118.

Fig. 68. Wenn zwey ähnliche Vielecke $Ab'c'd'e'f'g'$ und $ABCDEFG$ einen Polygon-Winkel z. B. A gemein haben, so laufen alle übrige gleichliegende Linien der Vielecke mit einander parallel.

Denn man ziehe die gleichliegenden Diagonalen $Ac'C$, $Ad'D$, u. s. w.; so ist wegen der Ähnlichkeit der Dreyecke $Ac'b'$ und ACB, und wegen des gemeinschaftlichen Winkels CAB, die Seite $b'c' \parallel BC$, vermög (§. 64. 1.); daher sind vermög §. 117. auch alle übrige gleichliegende Linien mit einander parallel.

§. 119.

Aufgabe. Zu einem gegebenen Vielecke $ABCDEFG$ ein anderes ähnliches $abcdefg$, wovon eine Seite ab bekannt ist, zu verzeichnen.

Auflösung. 1) Man theile das gegebene Vieleck durch beliebige Diagonalen AC, AD u. s. w. in lauter Dreyecke, suche zu AB, AC und der gegebenen ab nach §. 84. 1.) die 4te Proportional-Linie, und beschreibe damit aus a in der Gegend bey c einen kleinen Bogen. Hierauf suche man auch zu AB, CB und ab die 4te Proportionale, durchschneide damit aus b den vorigen Bogen; so ergibt sich der Punct c, und es ist das Dreyeck $abc \sim ABC$ (§. 78). Auf eben diese Weise suche man zu dem Dreyecke ACD ein ähnliches zu erhalten, indem man zu AC, CD und ac die 4te Proportional-Linie sucht, mit dieser aus c in der Gegend bey d einen Bogen beschreibt; sodann auch zu AC, AD und ac die 4te Proportionale bestimmt, und mit dieser aus a den beschriebenen Bogen bey d durchschneidet; so ist auch das Dreyeck $acd \sim ACD$. Durch ein so oft Mahl wiederhohltes Verfahren, als Dreyecke im gegebenen Vielecke vorkommen, wird die Figur $abcdefg$ der gegebenen $ABCDEFG$ ähnlich, vermög §. 107.

2) Oder man verzeichne zwey ähnliche geometrische Maßstäbe, welche sich so gegen einander verhalten, wie die zwey gegebenen Linien ab und AB, wenn nämlich AB, 2, 3 oder n Mahl so groß ist, als ab, daß auch die Einheit oder eine Hauptabtheilung (§. 85.) des Maßstabes für die gegebene Figur $ABCDEFG$ ebenfalls 2, 3 oder n Mahl so groß wird, als die Einheit oder eine Hauptabtheilung des Maßstabes für die zu suchende Figur. Nun untersuche man die Gerade AC, wie viel Einheiten sie auf dem größern Maß-

stabe enthält, nehme von dem kleinern Maßstabe eben so viel Einheiten, und beschreibe aus a wie zuvor einen Bogen bey c. Auf eben diese Art nehme man von dem kleinern Maßstabe so viel Einheiten, als die Linie BC auf dem größern gemessen hat, und durchschneide aus b den vorigen Bogen, so ist das Dreyeck $abc \backsim ABC$. Auf gleiche Weise verfahre man bey den übrigen Dreyecken, so wird auch die Figur $abcdefg \backsim ABCDEFG$ seyn. Fig. 68.

3) Viel schneller und richtiger erhält man aber zu einem gegebenen Vielecke $ABCDEFG$ ein ähnliches $abcdefg$, wovon eine Seite ab gegeben ist, auf folgende Art: 70.

Man beschreibe jedes Mahl mit der gleichliegenden Seite $AB = MN$ des gegebenen Vieleckes einen Bogen NO von unbestimmter Länge, trage die gegebene Seite ab des zu suchenden Vieleckes als Sehne auf diesen Bogen von N bis O, und ziehe die Gerade MO von beliebiger Länge; so erhält man dadurch den Reductionswinkel RMQ. Nun verlängere man in dem gegebenen Vielecke die gleichliegende Seite AB vor- und rückwärts, ziehe auf diese aus allen Vielecks-Winkeln senkrechte Linien Fm, En, Cp u. s. w., beschreibe mit dem Abstande Am aus M den Bogen mm'; so wird dessen Sehne mm' der gleichliegende Abstand am' für die zu suchende Figur seyn, welche man auf der verlängerten Geraden ab von a bis m' aufträgt. Der Grund hiervon erhellet aus der Proportion (A) in §. 110.

Hierauf beschreibe man mit dem Abstande An den Bogen nn', und trage die Sehne nn' von a bis n', und eben so die Sehne pp' von a bis p', um den gleichliegenden Abstand ap' mit Ap zu erhalten u. s. w. Nun errichte man in allen diesen bestimmten Puncten m', n', p', q', senkrechte Linien auf ab von unbestimmter Länge, und beschreibe auf gleiche Weise mit der Senkrechten mF einen Bogen ff'; so wird dessen Sehne ff' die gleichliegende Senkrechte $m'f$ seyn. Und so erhält man auch die übrigen Senkrechten $n'e$, $p'c$ u. s. f. Verbindet man nun die zusammengehörigen Puncte bc, de, u. s. w. durch gerade Linien, so wird das Vieleck $abcdef$ dem gegebenen $ABCDEF$ ähnlich seyn (§. 107.).

a) Hierin besteht eigentlich das Verkleinern (Reduciren) und Vergrößern der Figuren nach einem gegebenen Verhältnisse ihrer gleichliegenden Linien. Jedoch kann hier nicht unbemerkt bleiben, daß zwar das erstere in der Ausübung ganz wohl angehet, bey dem letzteren aber allzeit die Figuren um so unrichtiger werden, je mehr man sie vergrößert; weil alle Constructions-Abweichungen, die im Kleinen

Bayerische Staatsbibliothek München

noch unbeträchtlich waren, sich vergrößern, und öfters sehr sichtbar werden *).

Fig. 70.

§. 120.

Unter den oben angeführten Methoden, Vielecke zu verkleinern, oder zu vergrößern, ist die letztere aus dem Grunde die richtigste, weil hier die aus der Unvollkommenheit der Instrumente und Werkzeuge herrührenden unvermeidlichen Constructions-Abweichungen sich nicht durch die ganze Figur mittheilen, sondern jeder Fehler da verbleibet, wo er entstanden ist; da hingegen bey den andern Methoden jene Abweichungen durch die ganze Figur sich mittheilen, und am Ende öfters zu einer großen Unrichtigkeit anwachsen. Bey jener Methode pflegt man die Gerade mB die Abscissen-Linie (Längenlinie), die Theile Am, An, Ap, Aq die Abscissen (Längen), die Senkrechten Fm, En, Cp, Dq die Ordinaten (Breiten), und den Punct A den Anfangspunct der Abscissen zu nennen, und zwar ist Fm die Ordinate für die Abscisse Am, En die Ordinate für die Abscisse An und Cp die Ordinate zu der Abscisse Ap, u. s. w.

71. Es ist nicht unumgänglich nöthig, daß man eine Seite des gegebenen Vieleckes für die Abscissen-Linie annimmt, sondern man kann nach was immer für einer Richtung in der Figur eine gerade Linie für dieselbe wählen. Gewöhnlich verbindet man die zwey entferntesten Puncte A und H mit einander, nimmt diese Gerade für die Abscissen Linie, und einen Punct A oder H für den Anfangspunct der Abscissen an, und fället hierauf die Ordinaten. Nicht immer ist eine gleichliegende Linie des zu verzeichnenden ähnlichen Vieleckes bekannt, sondern an derselben statt, ist größtentheils das Verhältniß gegeben, welches die gleichliegenden Linien des gegebenen und zu suchenden ähnlichen Vieleckes gegen einander haben müssen. In diesem Falle ziehe man eine beliebige gerade Linie, trage auf selbe einen beliebigen Theil so oft Mahl auf, als die größere Verhältnißzahl die Einheit enthält, und beschreibe mit dieser Länge aus dem einen Endpuncte einen Bogen. Hierauf fasse man von den aufgetragenen gleichen Theilen so viele in den Zirkel, als die kleinere Verhältnißzahl die Einheit enthält, durchschneide damit diesen Bogen, und verbinde

*) Wie man was immer für eine Figur nach einem gegebenen Verhältnisse vermittelst eines eigends dazu bestimmten Instrumentes entweder verkleinert, oder vergrößert, s. m. meine Anweisung über die Verfertigung und den Gebrauch des Pantographs (Storchschnabels) 2te Auflage.

Bayerische Staatsbibliothek München

endlich den Durchschnittspunct mit dem Mittelpuncte des Bogens; so ist dadurch der gehörige Reductions-Winkel bestimmt. Sollte z. B. zu dem Vielecke $ABCD\ldots Q$ ein ähnliches verzeichnet werden, bey welchen sich ihre gleichliegenden Linien verhalten, wie $m:n$ (wie $5:2$); so trage man (Fig. 70.) von M bis N einen beliebigen Theil 5 Mahl auf, und beschreibe mit dieser Länge den Bogen NO. Hierauf fasse man davon 2 Theile, durchschneide aus N den Bogen bey O, und verbinde endlich diesen Punct mit dem Punct M; so ist OMN der gehörige Reductions-Winkel (§. 110.). Verfährt man nun eben so wie oben (§. 119. 3), und verbindet die auf solche Art bestimmten gleichnamigen Puncte $a, b, c, d\ldots\ldots$ durch gerade Linien; so wird dadurch das verlangte Vieleck $abc\ldots q$ erhalten. Fig. 71.

a) Die Methode, durch Einschreibung der Quadrate, Vielecke oder Figuren nach einem gewissen Verhältnisse ihrer gleichliegenden Seiten zu verzeichnen, welche einer gegebenen Figur ähnlich sind, wird dem eigenen Nachdenken der Anfänger überlassen.

Die Anwendung der Proportional-Linien auf dem Felde aber wird an seinem Orte in dem praktischen Theile unter Einem abgehandelt werden.

§. 121.

Folgende Aufgaben, wozu die erforderlichen Figuren nach den bisherigen Lehren leicht zu entwerfen sind, werden fleißigen Anfängern zur eigenen Übung überlassen.

1) Aus der gegebenen Sehne AB und der Höhe DC des Bogens eines Kreises den Durchmesser CE desselben zu finden? (nach §. 86.)

2) Wie groß ist die Höhe eines Bogens unserer Erde, dessen Sehne 1 deutsche Meile = 4000, und der Erddurchmesser = 6713223 Wiener Klaftern beträgt?

3) Jemand bedarf einen Holzklotz von beliebiger Länge, jedoch in der Quadratform von 18″ Seitenlänge; wie groß muß der Durchmesser des Baumes seyn, wenn für die abzuschlagende Rinde an jeder Seite 1″ zu rechnen ist? (nach §. 87.)

4) Wie groß muß auf diese Weise der Durchmesser des Baumes seyn, aus welchem der Holzklotz in Rechtecksform zu zimmern ist, an welchem die größere Seite $= a = 20''$ und zur kleinern wie $3:2$ sich verhalte? (nach §. 87.)

5) Den Ausdruck $x = \frac{2}{3} AB$, wobey AB eine beliebige Gerade bezeichnet, geometrisch zu construiren, oder welches dasselbe ist: von

7 *

Fig. 71. der gegebenen AB einen Theil, z. B. Am so abzuschneiden, daß dieser zu der gegebenen AB sich verhalte wie 2 : 3 (nach §. 84. 4).

Ähnlicherweise sind folgende Ausdrücke zu verzeichnen:

6) $x = \frac{AB^2}{AD}$, wobey AB und AD beliebige gerade Linien bezeichnen (nach §. 84. 2.);

7) $x = AB\sqrt{\frac{2}{3}}$ (nach §. 84. 4.) und 2);

8) $x = \sqrt{5}$ (nach §. 91. 1);

9) Zu beweisen, daß eine kleinere Sehne vom Mittelpunct des Kreises weiter entfernt liegt, als eine größere Sehne (nach §§. 28. und 61. 3) und 77.)

10) Die Seiten eines Rechteckes aus ihrem bekannten Verhältnisse; z. B. 3 : 2, und dem gegebenen Durchmesser des herumgeschriebenen Kreises zu finden (nach oben 4) und §. 87.).

11) Eine gegebene Gerade AB in das Verhältniß $\sqrt{m} : \sqrt{n} = \sqrt{2} : \sqrt{3}$ durch geometrische Construction zu theilen; (durch arithmetische Vorbereitung des Verhältnisses $\sqrt{2} : \sqrt{3} = 2 : \sqrt{6} = \sqrt{6} : 3$ nach Rk. 253. 5) und 40. Grundſ. **III.** Hierauf nach §. 84. 2) und 84. 2).

Zweytes Hauptstück.

Von den Eigenschaften der ebenen Flächen.

Erster Abschnitt.

Von der Bestimmung und Vergleichung des Flächeninhaltes geradliniger Figuren.

I. Von der Bestimmung des Flächeninhaltes überhaupt.

§. 122.

Man kann sich vorstellen, daß die Fläche einer geradlinigen Figur ausgemessen wird, wenn man untersucht, wie oft eine bekannte für die Einheit angenommene Fläche, das Maß, in derselben enthalten ist, das heißt, wie viel Mahl sich die bekannte Fläche in der auszumessenden herumlegen lasse. Die Zahl nun, welche anzeigt, wie oft die bekannte Fläche in der auszumessenden enthalten ist, gibt den Flächeninhalt derselben in eben solchen Einheiten zu erkennen, als die für die Einheit angenommene Fläche ist (§. 9.). Das Maß oder die als Einheit gewählte Fläche, womit geradlinige Figuren ausgemessen werden, ist gewöhnlich ein Quadrat, dessen jede Seite bald einen Zoll, bald einen Schuh, bald eine Klafter, zuweilen auch, bey der Bestimmung sehr großer Flächen (z. B. ganzer Provinzen) eine Meile beträgt. Die erstere Fläche heißt ein Quadrat-Zoll, die zweyte ein Quadrat-Schuh, die dritte eine Quadrat-Klafter, u. s. w. Fig.

a) Die Flächenmaße werden auf eben die Art, wie die Längenmaße (Nr. 82.) bezeichnet; nur pflegt man, um jene von diesen zu unterscheiden, entweder ein kleines Quadrat □ oder auch den Buchstaben *q* zu den gewöhnlichen Zeichen noch hinzu zu setzen. So z. B. bedeu-

ten 528□° 31□′ 142□″; oder 528 q° 31 q' 142 q'' eine Fläche, die
Fig. 528 Quadratklaftern, 31 Quadratschuhe, und 142 Quadratzolle enthält. Wenn aber die Ruthe anstatt der Klafter im Gebrauche ist; so heißt die erste Zahl 528 Quadratruthen u. s. w.

§. 123.

Der Flächeninhalt eines jeden Rechteckes wird erhalten, wenn man die Grundlinie mit der Höhe oder Breite desselben multipliciret (beyde Längen in Zahlen einer gewissen zum Grunde gelegten Einheit ausgedrückt (§. 9. und 87.).

72. 1) Es sey das zum Maße angenommene Quadrat $M = 1$ Quadratschuh z. B., und dessen Seite lasse sich auf der Grundlinie CD eines Rechteckes a Mahl (z. B. 5 Mahl), und in der Höhe AC desselben b Mahl (z. B. 3 Mahl) auftragen. Man denke durch die Puncte $c, d, e \ldots$ auf der Grundlinie parallele Linien zu der Höhe, und sodann durch die Puncte $h, i \ldots$. der Höhe parallele Linien zur Grundlinie; so ist es überzeugend, daß auf der Grundlinie eine Reihe von $a = 5$ gleichen Quadraten entstehet, deren jedes dem für das Maß (für die Einheit) angenommenen Quadrate M gleich ist, weil sie alle gleiche Merkmahle haben (Rk. 2.), d. i. auf eine vollkommen gleiche Weise bestimmt sind, und daß $b = 3$ solche vollkommen gleiche Reihen über einander stehen. Es sind nämlich

in 1ner Reihe a Quadrate
„ 2 Reihen $2a$ „
. . . .
und in b „ $b \cdot a = 3 \cdot 5 = 15$ Quadrate = dem Flächeninhalte des Rechteckes.

Wäre die Einheit der zum Maße angenommenen Fläche $M = 1$ Quadratklafter, oder $= 1$ Quadratruthe ꝛc., und dessen Seite in der Grundlinie eines Rechteckes 7 Mahl, und in der Höhe 4 Mahl enthalten; so wäre der Flächeninhalt dieses Rechteckes $= 7 \cdot 4 = 28$ Quadratklafter, oder 28 Quadratruthen, u. s. w.

2) Ist die Seite des gewählten Maßes in den Seiten des auszumessenden Rechteckes nicht genau enthalten, so wählt man auf ähnliche Weise, wie schon §. 9 erklärt worden ist, z. B. den 10ten Theil der Länge des Maßes u. s. w., bis jede Seite des auszumessenden Rechteckes entweder genau, oder doch bis auf ein unbedeutendes, in der Anwendung als Null anzusehendes Theilchen erschöpft ist.

Nachdem aber der Gebrauch des geometrischen Maßstabes bereits bekannt ist, so darf man bey Bestimmung des Flächeninhaltes eines Rechteckes nur untersuchen, wie viele Theile sowohl die Grundlinie als auch die Höhe auf dem Maßstabe enthält; und wenn man nun die Anzahl Theile der Grundlinie mit der Anzahl der gleichen Theile der Höhe multiplicirt, so erhält man den Flächeninhalt des Rechteckes. Oder wenn man die ganzen CD und AC für ihre Theile setzt (Rk. 40. I.); so kann man auch nach dem Sprachgebrauche sagen: der Flächeninhalt eines Rechteckes ist gleich dem Producte aus der Grundlinie mit der Höhe oder Breite desselben; es ist nämlich das Rechteck $ABDC = CD \,.\, CA$. Fig. 72.

§. 124.

Den Flächeninhalt eines Quadrates erhält man, wenn man eine Seite desselben mit sich selbst multiplicirt. 30.

Denn das Quadrat ist ein Rechteck von gleicher Grundlinie und Höhe (§. 48.); folglich ist vermöge des Vorhergehenden der Flächeninhalt eines Quadrats, dessen jede Seite in der Länge z. B. 1 Klafter = 6 Schuhe beträgt, nämlich eine Quadratklafter = 6 . 6 = 36 Quadratschuhen; ein Quadratschuh = 12 . 12 = 144 Quadratzollen, u. s. w.; folglich ist eine Quadratklafter = 36 . 144 = 5184 Quadratzollen, u. s. f.

Bey dem Decimalmaße (Rk. 284. I.) enthält die Quadratklafter 100 Quadratschuhe, der Quadratschuh 100 Quadratzolle, der Quadratzoll 100 Quadratlinien, u. s. w.; folglich ist eine Decimal-Quadratklafter = 100 q' = 10000 q'' = 1000000 q''' u. s. w., daher sind z. B. 2 q° 4 q' 45 q'' = 20445 q''; und umgekehrt sind 124809 q'' = 12 q° 48 q' 9 q'', indem man nur von der Rechten gegen die Linke für jede kleinere Maßgattung bis zur höchsten, zur Quadratklafter, zwey Ziffern abschneidet.

Oder auch, es sind 2 q° 4 q' 45 q'' = 2,0445 q° (Rk. 122.)

a) Da man in der Ausübung der Geometrie, der einfachen Rechnung wegen, gewöhnlich die Decimaleintheilung, und nur in einzelnen Fällen die landesübliche Eintheilung des Längenmaßes anzuwenden pflegt, so wollen wir hier bey den Erläuterungsbeyspielen größten Theils das erstere gebrauchen, auf den Gebrauch des letztern aber in einigen Beyspielen hinweisen.

§. 125.

Fig. 72. 1) Ist die Länge der Grundlinie und auch die Höhe eines Rechteckes, oder nur Eine dieser zwey Abmessungen in Klaftern, Schuhen, Zollen u. s. w. ausgedrückt, so muß man, damit das Rechteck mit einerley Einheit gemessen werde, die größern Maßgattungen auf die kleinste, oder umgekehrt, die kleinern auf die größte Maßgattung bringen (Nk. 122.), und sodann diese beyden in einerley Einheiten ausgedrückten Abmessungen mit einander multipliciren, um den Flächeninhalt des Rechteckes zu erhalten.

Es sey z. B. im Decimalmaße eines Rechteckes

Grundlinie $= 5^\circ\ 2'\ 8'' = 528''$ }
und Höhe $= 0^\circ\ 9'\ 2'' = 92''$ } verm. §. 124.

so ist $528'' \times 92'' = 48576\ q'' = 4\ q^\circ\ 85\ q'\ 76\ q''$

Oder: $5^\circ\ 2'\ 8'' = 5{,}28^\circ$

$0^\circ\ 9'\ 2'' = 0{,}92^\circ$

daher $5{,}28^\circ \times 0{,}92^\circ = 4{,}8576\ q^\circ$ (Nk. 117.).

2) Liegt das zwölftheilige oder Duodecimalmaß zum Grunde, und hat z. B. eines Rechteckes

Grundlinie $= 4^\circ\ 0'\ 9'' = 297''$

und Höhe $= 0^\circ\ 3'\ 6'' = 42''$

so ist $297'' \times 42'' = 12474\ q''$;

ferner ist $12474\ q'' : 144 = 86\ q'\ 90\ q''$

endlich $86\ q' : 36 = 2\ q^\circ\ 14\ q'$; es enthält demnach das Rechteck $2\ q^\circ\ 14\ q'\ 90\ q''$.

Oder: weil $4^\circ\ 0'\ 9'' = \frac{33^\circ}{8}$,

und $0^\circ\ 3'\ 6'' = \frac{7^\circ}{12}$ sind (Nk. 109.),

so ist $\frac{33^\circ}{8} \times \frac{7^\circ}{12} = \frac{231}{96}\ q^\circ = 2\frac{13}{32}\ q^\circ = 2\ q^\circ$ und

$\frac{13 \cdot 36}{32}\ q' = 2\ q^\circ\ 14\frac{5}{8}\ q' = 2\ q'\ 14\ q'\ 90\ q''$ wie oben.

§. 126.

Im Baufache ist es üblich, die Quadratklafter in 6 gleiche Streifen (Riemen) zu theilen, die man Quadrat-Klafterschuhe (Riemenschuhe) nennt; die Breite eines jeden solchen Theiles denkt man wieder in 12 gleiche Theile zertheilt, und diese heißen Quadrat-Klafterzolle u. s. w. Es ist demnach Ein Klafterschuh ein Rechteck von 1° lang, und $1'$ breit u. s. f.

Quadratklaftern, Quadratschuhe, Quadratzolle . . . . . können abgekürzt mit q°, q', q'' . . . . . .; hingegen Klafterschuhe,

Klafterzolle, Klafterlinien in einer Quadratklafter mit qkl', qkl'', qkl''' u. s. w., bezeichnet werden. Vermöge dieser Eintheilung und Benennung ist demnach Fig.

1) $1\ qkl' = \frac{1}{6}\ q^{\circ} = \frac{1}{6} \cdot 36\ q' = 6\ q'$;
2) $1\ qkl'' = \frac{1}{12}\ qkl' = \frac{1}{12} \cdot 6\ q' = \frac{1}{2}\ q' = 72\ q''$;
3) $1\ qkl''' = \frac{1}{12}\ qkl'' = \frac{1}{12} \cdot 72\ q'' = 6\ q''$;
4) $1\ qkl^{IV} = \frac{1}{12}\ qkl''' = \frac{1}{12} \cdot 6\ q'' = \frac{1}{2}\ q'' = 72\ q'''$;
5) $1\ qkl^{V} = \frac{1}{12}\ qkl^{IV} = \frac{1}{12} \cdot 72\ q''' = 6\ q'''$.

Und umgekehrt:

6) $1\ q^{\circ} = 6\ qkl'$;
7) $1\ q' = \frac{1}{6}\ qkl' = 2\ qkl''$;
8) $1\ q'' = \frac{1}{6}\ qkl'' = 2\ qkl^{IV}$;
9) $1\ q''' = \frac{1}{6}\ qkl^{V} = 2\ qkl^{VI}$;

u. s. w.

Bey der wirklichen Ausübung kann die Verwandlung des Riemenmaßes in Quadratmaß, und umgekehrt des Quadratmaßes in Riemenmaß, durch die folgende Tabelle sehr erleichtert werden. Auch kann man sich bey der Multiplication dieser Längenmaße eines eigen hierzu eingerichteten Einmahleins bedienen, aus welchem man die einzelnen Partial-Producte nur herausschreiben darf.

Riemenmaß.	Quadratmaß.	Riemenmaß.	Quadratmaß.	Quadratmaß.	Riemenmaß.
$1\ qkl'$	$6\ q'$	$1\ Sch''$	$12\ q''$	$1\ q'$	$2\ qkl''$
$1\ qkl''$	$72\ q''$	$1\ Sch'''$	$1\ q''$	$1\ q''$	$2\ qkl^{IV}$
$1\ qkl'''$	$6\ q''$	$1\ Sch^{IV}$	$12\ q'''$	$1\ q''$	$2\ qkl^{VI}$
$1\ qkl^{IV}$	$72\ q'''$	$1\ Sch^{V}$	$1\ q'''$	$1\ q^{IV}$	$2\ qkl^{VIII}$
$1\ qkl^{V}$	$6\ q'''$	$1\ Sch^{VI}$	$12\ q^{IV}$	$1\ q''$	$1\ Sch'''$
$1\ qkl^{VI}$	$72\ q^{IV}$	$1\ Sch^{VII}$	$1\ q^{IV}$	$1\ q'''$	$1\ Sch^{V}$
$1\ qkl^{VII}$	$6\ q^{IV}$	$1\ Sch^{VIII}$	$12\ q^{V}$	$1\ q^{IV}$	$1\ Sch^{VII}$

§. 127.

Die Berechnung des Flächeninhaltes der Rechtecke in Quadratklaftern, Klafterschuhen, Klafterzollen ꝛc. geschieht sehr bequem

Fig. durch folgenden Rechnungsvortheil. Es sey die Grundlinie eines

Rechteckes =	15°	4′	5″ . . .	‴ . . .	IV
und die Höhe =	4°	2′	6″		
so ist	60	16	20		
		30	16	20	
			90	48	60
	60	46	126	68	60 $q$kl^{IV},

der Flächeninhalt = 69 $q°$ 3′ $q$kl′ 0 $q$kl″ 1 $q$kl‴ 0 $q$kl^{IV}; man sagt nämlich: 4° × 15° geben 60 $q°$, 4 × 4′ geben 16 $q$kl′, 4° × 5″ geben 20 $q$kl″. Sodann 2′ × 15° geben 30$q$kl′, welche man unter die vorigen 16$q$kl′ schreibt; 2′ × 4′ geben 8 q', vermög vorigen §. in 7) ist 1 q' = 2 $q$kl″, mithin 8 q' = 16$q$kl″, welche unter die vorigen 20 $q$kl″ geschrieben werden; 2′ × 5″ geben 10 Sch″, vermög obiger Tabelle ist 1 Sch″ = 12 q'', und vermög vorigen §. in 8) ist 1 q'' = $\frac{1}{6}$ $q$kl‴, mithin 1 Sch″ = 12 q'' = $\frac{1}{6}$.12 $q$kl‴ = 2$q$kl‴; also 10 Sch″ = 20 kl‴. Endlich 6″ × 15° geben 90 $q$kl″; 6″ × 4′ geben 24.2 = 48 $q$kl‴; 6″ × 5′ geben 30 q''; weil aber vermöge des obigen 1 q'' = 2 $q$kl^{IV} ist, so sind 30 q'' = 30.2 = 60$q$kl^{IV}.

Nun werden die unter einander stehenden gleichnamigen Theile, rechts angefangen, addirt, und die kleinern durch die Division auf die nächst größere Gattung, vermöge der vorigen Tabelle, gebracht; nämlich die Klafterpuncte werden durch die Division mit 12 in Klafterlinien, diese ferner durch die Division mit 12 in Klafterzolle, und zuletzt die Klafterschuhe durch die Division mit 6 in Quadratklaftern verwandelt, und die bey den Divisionen etwa bleibenden Reste unter die gleichnamigen Stellen geschrieben. Was endlich nach dieser Reduction heraus kommt, ist der gesuchte Flächeninhalt in Quadratklaftern, Klafterschuhen, Klafterzollen ꝛc.

Aus dem Vorigen kann man nun für die Berechnung des Flächeninhaltes aus den bekannten Abmessungen einer Fläche folgende ganz einfache Regel ableiten: Nachdem die gleichnamigen Theile der Grundlinie und Höhe unter einander geschrieben sind, werden alle Theile der einen Abmessung mit allen Theilen der andern Abmessung nach und nach multiplicirt, die Partial-Producte unter die gleichnamigen Stellen mit dem Bemerken geschrieben, daß diejenigen Producte, deren beyde Factoren nur Theile der Klafter bedeuten, verdoppelt werden müssen.

Um diese Regel geläufig zu machen, folgen noch einige Beyspiele: Fig.
Es seyen die Inhalte von Rechtecken oder Dreyecken zu bestimmen,

1) Grundlinie =	3°	$2'$	$3''$	. . . $'''$	. . . ^{IV}
Höhe =	2	5	4		
so ist der	6	4	6		
		15	20	30	
			12	16	24
	6	19	38	46	24 qkl^{IV}
Flächeninhalt =	9 q°	4 qkl'	6 qkl''	0 qkl'''	0 qkl^{IV}

2) Grundlinie =	4°	$0'$	$9''$	. . . $'''$	. . . ^{IV}
Höhe =	0	3	6		
		12	0	54	
			24	0	108
Flächeninhalt =	2 q°	2 qkl'	5 qkl''	3 qkl'''	0 qkl^{IV}

3) Grl. =	8°	$0'$	$8''$	$0'''$	6^{IV}	. . . ^{V}	. . . ^{VI}	. . . ^{VII}
Höhe =	0	5	0	4				
		40	0	80	0	60		
				32	0	64	0	48

Flächeninh. = 6 q° 4 qkl' 9 qkl'' 4 qkl''' 10 qkl^{IV} 4 qkl^{V} 4 qkl^{VI}

Soll nun das Riemenmaß in Quadratmaß verwandelt werden (welches bey mehrern einzelnen zusammengehörigen Flächen erst nach beendigter Rechnung vortheilhafter auf Einmahl geschieht), so kann dieß, vermög der vorigen Tabelle, sehr leicht vorgenommen werden. So z. B. wäre die obige Fläche von 69 q° 3 qkl' 0 qkl'' 1 qkl''' = 69 q° 18 q' 6 q''.

§. 128.

Wenn man den Quadratschuh für die Einheit des Flächenmaßes wählt, und denselben in 12 Schuhzolle, den Schuhzoll in 12 Schuhlinien u. s. f. eintheilt, so findet man den Flächeninhalt eines Rechteckes vermög der Erklärung der Schuhzolle, Schuhlinien, u. s. w. durch folgenden Rechnungsvortheil in Quadratschuhen (q'), Schuhzollen (Sch$''$), Schuhlinien (Sch$'''$) u. s. f.; indem man die unter einander geschriebenen gleichnamigen Theile der einen Abmessung mit den Theilen der andern Abmessung nach und nach multiplicirt, die einzelnen Producte (ohne jedoch eines, wie vorhin, zu verdoppeln) unter die gleichnamigen Stellen schreibet, und endlich in der

Fig. Summe die gehörige Reduction der kleinern Gattungen auf die nächst größern nach der obigen Tabelle vornimmt. Z. B.

Grundlinie =	10′	5″	3‴	. . . IV	. . . V
Höhe =	6	8	4		
	60	30	18		
		80	40	24	
			40	20	12
Flächeninhalt =	69 q′	10 Sch″	5 Sch‴	9 Sch^{IV}	0 Sch^{V};

und so in andern Fällen.

§. 139.

In solchen Fällen, wo es nur nöthig ist, die Längen der Linien bis in die Schuhe, mithin das Flächenmaß nur in Quadratschuhen verläßlich zu bestimmen, kann der Flächeninhalt eines Rechteckes (oder Dreyeckes) in Quadratklaftern und Quadratschuhen nach der folgenden Art sehr leicht bestimmt werden:

1) Man schreibe die in Klaftern und Schuhen ausgedrückten Abmessungen der Grundlinie und Höhe dergestalt hin, daß die gleichnamigen Gattungen unter einander zu stehen kommen.

2) Nachher multiplicire man die Schuhe insbesondere, und auch die Klaftern insbesondere mit einander, und setze die Producte unter ihre gehörigen Stellen.

3) Hierauf multiplicire man nach der Diagonale (übers Kreuz) die Schuhe der einen Abmessung, in Bruchtheilen der Klafter ausgedrückt, mit den Klaftern der andern Abmessung, und schreibe die Producte, welche Quadratklaftern sind, unter die schon vorhandenen Quadratklaftern; die etwa vorhandenen Brüche von Quadratklaftern aber bringe man nach §. 124. in Gedanken auf Quadratschuhe, und schreibe sie unter die Stelle der Quadratschuhe. (Da hier bey den Bruchtheilen der Quadratklafter die Nenner nur entweder 2, 4 oder 6 sind, so ist $\frac{1}{2}\, q^{\circ} = 18\, q'$; $\frac{1}{3}\, q^{\circ} = 12\, q'$; daher $\frac{2}{3}\, q^{\circ} = 24\, q'$ und $\frac{1}{6}\, q^{\circ} = 6\, q'$ und $\frac{5}{6}\, q^{\circ} = 30\, q'$, welches sehr leicht im Gedächtnisse zu behalten, und bey großen Berechnungen von vielem Vortheile ist.

4) Alles dieses addirt, gibt den verlangten Flächeninhalt des Rechteckes. Ein Beyspiel wird diese einfache Regel noch mehr erläutern; nur muß man sich dabey erinnern, daß nach der bis jetzt üblichen Eintheilung der Klafter in 6 Schuhe, $1' = \frac{1}{6}{}^{\circ}$; $2' = \frac{1}{3}{}^{\circ}$; $3' = \frac{1}{2}{}^{\circ}$; $4' = \frac{2}{3}{}^{\circ}$, und $5' = \frac{5}{6}{}^{\circ}$ betragen.

Fig.

Es sey die Grundlinie $= 8^\circ\ 2'$
und die Höhe $= 5^\circ\ 3'$

so ist $40\ q^\circ\ 6\ q'$ vermöge 2)
1 24 vermög 3), weil $5^\circ . \frac{1}{3} = \frac{5}{3}\ q^\circ$ $= 1\frac{2}{3}\ q^\circ = 1\ q^\circ\ 24\ q'$ ist.
4 . . . vermög 3), weil $8^\circ . 3' = 8^\circ . \frac{1}{2}^\circ$ $= 4\ q^\circ$ sind;

folglich sind $45\ q^\circ\ 30\ q' =$ dem Flächeninhalt des Rechteckes.

§. 130.

Die Richtigkeit dieser Regel erhellet aus dem Folgenden: Wenn man nämlich die zu multiplicirenden Abmessungen eines Rechteckes nach den in Nk. 152. gegebenen Regeln mit einander multiplicirt; so ist das obige Beyspiel $(8^\circ + \frac{1}{3}^\circ) \times (5^\circ + \frac{1}{2}^\circ) = 40\ q^\circ + \frac{5}{3}\ q^\circ + \frac{8}{2} q^\circ + \frac{1}{6} q^\circ = (40 + 1\frac{2}{3} + 4 + \frac{1}{6})\ q^\circ = (45 + \frac{2}{3} + \frac{1}{6})\ q^\circ = 45\ q^\circ + 24\ q' + 6\ q' = 45\ q^\circ + 30\ q' =$ dem Flächeninhalte des Rechteckes, wie oben. Vergleicht man diese nach richtigen Gründen vorgenommene Multiplication mit den im vorigen Paragraphe nach der gegebenen Regel verrichteten; so wird man die Richtigkeit derselben außer Zweifel finden. Übrigens erhellet die Kürze jener Rechnungsmethode aus der geringen Anzahl der Ziffern, die man hierzu nöthig hat.

Noch einige Beyspiele zur Übung.

1) Grundlinie $27^\circ\ 1'$
Höhe $18\ \ 4$

216 4 } vermög 2)
27
3 . . . . wegen $18^\circ . \frac{1}{6}^\circ = 3\ q^\circ$
18 . . . . wegen $27^\circ . \frac{2}{3}^\circ = 18\ q^\circ$;

Flächeninhalt $507\ q^\circ\ 4\ q'$.

2) Grundlinie $107^\circ\ 5'$
Höhe $13\ \ 0$

321 0
107
10 30 wegen $13^\circ . \frac{5}{6}^\circ\ q = \frac{65}{6}\ q^\circ = 10\frac{5}{6}\ q^\circ$

Flächeninhalt $1401\ q^\circ\ 30\ q'$.

Fig.

3) Grundlinie 15° $2'$
Höhe 0 3

Flächeninhalt $7\,q^\circ$ $24\,q'$

Da die Multiplication einer ganzen Zahl mit $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ oder $\frac{1}{6}$ leicht aus dem Gedächtnisse verrichtet werden kann, indem man nur die ganze Zahl durch den Nenner dividiren darf, weil der Zähler 1 nichts multiplicirt (Nk. 62.); so kann man da, wo z. B. $4' = \frac{2}{3} = \frac{1^\circ}{3}.2$, oder $5' = \frac{5}{6}{}^\circ = \frac{3^\circ + 2^\circ}{6} = \frac{1}{2}{}^\circ + \frac{1}{3}{}^\circ$ mit einer ganzen Zahl von Klaftern zu multipliciren ist, im ersten Falle die ganze Zahl der Klaftern durch 3 dividiren, und den Quotienten doppelt anschreiben; im zweyten Falle aber die ganzen Klaftern Einmahl durch 2, und das andere Mahl durch 3 dividiren, und die Quotienten nach dem Vorhergehenden an ihre gehörige Stelle schreiben; wodurch die Multiplication, die man auf der Seite mit den ganzen Klaftern und dem Bruche $\frac{2}{3}$, oder $\frac{5}{6}$ insbesondere verrichten muß, erspart wird, wie solches das folgende Beyspiel zeigt.

4) Grundlinie	134°	$4'$	
Höhe	95	5	
	670	20	vermöge 2)
	1206		
	31	24	wegen $95^\circ.\frac{2}{3}{}^\circ = (95^\circ.\frac{1}{3}{}^\circ).2 =$
	31	24	$(31\,q^\circ + 24\,q').2$
	67	....	wegen der Division durch 2 } weil*)
	44	24	" " " 3 }
Flächeninhalt	$12905\,q^\circ$	$20\,q'$	

§. 131.

Da der Flächeninhalt eines Rechteckes aus dem Producte besteht, wenn man die Grundlinie mit der Höhe multiplicirt; so kann auch umgekehrt aus dem gegebenen Flächeninhalte und einer dieser Linien die andere gefunden werden, indem man den Flächeninhalt durch die gegebene Linie, als einen Factor desselben dividirt; der Quotient gibt sodann den anderen Factor, d. i. die Länge der anderen Linie zu erkennen.

---

*) $134^\circ.\frac{5}{6}{}^\circ = 134^\circ.\left(\frac{3^\circ+2^\circ}{6}\right) = 134^\circ.(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}{}^\circ) = 134^\circ.\frac{1}{2}{}^\circ + 134^\circ.\frac{1}{3}{}^\circ = 67\,q^\circ + 44\frac{2}{3}q^\circ = 67\,q^\circ + 44\,q^\circ + 24\,q'$ ist.

Dieses kann nach einer der folgenden zwey Arten geschehen: Fig.

1) Man bringe sowohl den Dividenden als auch den Divisor auf gleiche Benennung, d. h. den Dividenden auf Flächenmaß, den Divisor aber auf Längenmaß derselben Benennung, und zwar entweder die größern Maßgattungen auf die kleinste, oder umgekehrt die kleinern auf die größte Maßgattung; nach vollbrachter Division zeigt der Quotient den andern Factor in eben solchen Einheiten an, in welchem der Divisor ausgedrückt ist. Es sey z. B. im Decimalmaße

der Flächeninhalt eines Rechteckes $= 48576\ q''$

die Höhe desselben $= 0°\ \ 9'\ \ 2'' = \ \ 92''$

so ist $48576\ q'' : 92'' = 528'' = 5°\ \ 2'\ \ 8''$.

Oder Flächeninhalt $= 4{,}8576\ q°$

und Höhe $= 0{,}92°$

so ist $4{,}8576\ q° : 0{,}92° = 5{,}28°$ = der Grundlinie.

2) Liegt das zwölftheilige Maß zum Grunde, und es ist z. B.

der Flächeninhalt eines Rechteckes $= 2\ q°\ \ 14\ q'\ \ 90\ q'' = 12474\ q''$

die Grundlinie $= 4°\ \ 0'\ \ 9'' = 297''$

so ist $12474\ q'' : 297'' = 42'' = 3'\ 6''$ = der Höhe des Rechteckes.

Oder: Flächeninhalt $= 2\ q°\ \ 14\ q'\ \ 90\ q'' = \frac{693}{288}\ q°$

und Grundlinie $= 4°\ \ 0'\ \ 9'' = \frac{33°}{8}$

so ist $\frac{693}{288}\ q° : \frac{33°}{8} = \frac{693}{288}\ q° \times \frac{8°}{33} = 3'\ \ 6''$ = der Höhe wie vorhin.

§. 132.

Öfters ist es erforderlich, aus einem gegebenen Flächenmaße die Quadratwurzel zu ziehen. Man verfährt dabey am kürzesten, wenn man die kleinsten Gattungen als Brüche der nächst größern vorstellet, und sodann die Wurzel aus dem Zähler und aus dem Nenner wie gewöhnlich zieht; so erhält man dann zur Wurzel ein Längenmaß; weil eine Fläche, in Zahlen ausgedrückt, ein Product aus zwey Längenmaßen ist.

1) Es sey im Decimalmaße die gegebene Fläche $= 1169{,}64\ q°$ so ist $\sqrt{1169{,}64} = 34{,}2°$.

2) Es sey im 12 theiligen Maße die gegebene Fläche $= 24\ q°\ 10\ q'\ 72\ q''$, so ist $\sqrt{(24\ q°\ 10\ q'\ 72\ q'')} = \sqrt{(24\ q°\ 10\tfrac{72}{144}\ q')} = \sqrt{(24\ q°\ \ 10\tfrac{1}{2}\ q')} = \sqrt{(24\ q°\ \ \tfrac{21}{2}\ q')} = \sqrt{24\tfrac{21}{2\cdot 36}\ q°} = \sqrt{24\tfrac{7}{24}\ q°} = \sqrt{24{,}2917\ q°} = 4{,}92° = 4°\ 5'\ 6''$.

Fig. 3) Es ist ein Platz zu einer Baumschule $2\frac{3}{4}$ Joch groß (das Joch zu 1600 Quadratklaftern) ins Quadrat abzustecken, wie lang muß eine Seite seyn?

§. 133.

73. Zwey Parallelogramme $ABDC$ und $ABFE$, welche auf einer gemeinschaftlichen Seite AB und zwischen zwey Parallelen AB und CF stehen, sind am Flächeninhalt einander gleich, sie mögen wie immer schief geneigt seyn.

Denn es ist $AB = CD$
und $AB = EF$ (§. 66.);

daher $CD = EF$ (Rk. 40. Grunds. III.);
es ist aber $DE = DE$

mithin auch $CD + DE = DE + EF$ (Rk. 47. I.)
es ist nämlich $CE = DF$
nun ist $CA = DB$
und auch $AE = BF$ (§. 66.);

daher ist das Dreyeck $ACE = BDF$ (§. 23. 3.);
zieht man von diesen das gemeinschaftliche, außerhalb der Parallelogramme liegende Dreyeck DGE ab,

so ist $ACE - DGE = BDF - DGE$ (Rk. 54. I.), nämlich das Trapez $AGDC = BGEF$. Diese gleichen Trapeze werden durch das Dreyeck AGB zu Parallelogrammen ergänzt, also ist $AGDC + AGB = BGEF + AGB$ (Rk. 47. I.); folglich ist das Parallelogramm $ABDC = ABFE$. Um uns kurz ausdrücken zu können, werden wir in der Folge solche Flächen, deren Gleichheit nicht durch ihre Deckung (Congruenz §. 22. und 23.), sondern durch andere geometrische Schlüsse erwiesen wird, **gleichhaltig** nennen; es sind also die erstgenannten Parallelogramme gleichhaltig.

Aus dem so eben erwiesenen Satze schließen wir:

1) Daß auch Dreyecke, die zwischen zwey Parallelen und auf einer gemeinschaftlichen Seite AB stehen,
74. am Flächeninhalte einander gleich, d. i. gleichhaltig sind, wenn ihre gemeinschaftliche Seite in einer der Parallelen liegt.

Man ergänze jedes Dreyeck zu einem Parallelogramm (§. 67.), indem man durch jeden Endpunct der gemeinschaftlichen Seite eine

Parallele zur gegenüber stehenden Seite des Dreyeckes führt, so ist das Parallelogramm Fig. 74.

$ABDF = ABEC$ vermöge des Vorigen,

und auch $\frac{1}{2}ABDF = \frac{1}{2}ABEC$ (Rk. 72. Grunds. I.);

folglich ist das Dreyeck $ABD = ABC$ (§. 67.).

2) Daß auch Parallelogramme $ABCD$ und $EFGH$, oder Dreyecke DBA und EHG zwischen zwey Parallelen, wenn sie gleiche Seiten AD und EH haben, einander gleichhaltig sind, obschon sie nicht auf einer gemeinschaftlichen Linie stehen. 75.

Denn man verbinde zwey Puncte des einen Parallelogramm mit den zwey gegenüber liegenden Puncten des andern, so entsteht ein drittes Parallelogramm $AFGD$, welches vermög des Obigen jedem der gegebenen Parallelogramme an Fläche gleich ist;

es ist nämlich $ABCD = AFGD$

und $EFGH = AFGD$;

daher auch $ABCD = EFGH$ (Rk. 40. Grunds. III.),

und $\frac{1}{2}ABCD = \frac{1}{2}EFGH$

folglich ist das Dreyeck $DBC = EGF$.

3) Fället man aus den Puncten D und E die Senkrechten Dm und En auf BG, so sind diese einander gleich (§. 34.). Nun sind diese Senkrechten die Höhen der Parallelogramme $ABCD$ und $EFGH$, und auch der Dreyecke DBC und EFG, so wie die Seiten BC und FG die Grundlinien derselben sind (§. 49.); und wir können nun sagen: daß Parallelogramme und auch Dreyecke, die gleiche Grundlinien und gleiche Höhen haben, an Fläche gleichhaltig sind.

II. Bestimmung des Flächeninhaltes der Drey- und Vierecke, so wie der unregelmäßigen Vielecke.

§. 134.

Der Flächeninhalt eines jeden Parallelogramm ist gleich dem Producte aus der Grundlinie mit der Höhe. 33.

Man errichte in den Endpuncten einer Seite des Parallelogramm senkrechte Linien, welche die gegenüber stehende Seite oder ihre Verlängerung schneiden, so stehen jene auch auf dieser senkrecht (§. 36. 1.), und das dadurch entstandene Parallelogramm $AEFB$ ist zugleich ein Rechteck (§. 48.).

8

Fig. 33.

Nun ist das Parallelogr. $AEFB = ACDB$ (§. 133.)
und auch $AEFB = EF.AE = AB.AE$ (§. 123.)

folglich ist das Parallelogr. $ACDB = AB.AE = CD.AE$.

Man erhält demnach den Flächeninhalt eines jeden Parallelogramm, wenn man eine von zwey gegenüber stehenden Seiten mit ihrem senkrechten Abstande multiplicirt.

Es sey die Grundlinie $CD = AB = 46{,}8°$
und die Höhe $= AE = 20{,}3°$

so ist $46{,}8 \times 20{,}3 = 950{,}04\ q°$

§. 135.

Der Flächeninhalt eines jeden Dreyeckes ist gleich dem Producte aus der Grundlinie mit der halben Höhe, oder: gleich dem Producte aus der halben Grundlinie mit der Höhe.

Man ergänze das Dreyeck ACD zu einem Parallelogramm $ABDC$ nach §. 67.

so ist vermög des Vorigen $ABDC = CD.EA$

und $\frac{ABDC}{2} = \frac{CD.EA}{2}$ (Rk. 72. Grunds. I.),

und auch $\frac{ABDC}{2} = ACD$ (§. 67.);

folglich ist das Dreyeck $ACD = \frac{CD.EA}{2} = \frac{1}{2}CD.EA$
$= CD.\frac{1}{2}EA$.

Der Flächeninhalt eines jeden Dreyeckes wird demnach gefunden, wenn man die Grundlinie mit der Höhe multiplicirt, und das Product durch 2 dividirt.

Aus der Gleichung $ACD = \frac{1}{2}CD.AE$ findet man

$$AE = \frac{ACD}{\frac{1}{2}CD}$$

und $CD = \frac{ACD}{\frac{1}{2}AE}$, das heißt: wenn man den Flächeninhalt eines Dreyeckes durch die halbe Grundlinie dividirt, so gibt der Quotient die Höhe des Dreyeckes; dividirt man hingegen den Flächeninhalt durch die halbe Höhe, so gibt der Quotient die Grundlinie desselben zu erkennen. Es sey z. B. der Flächeninhalt des Dreyeckes

$$ACD = 1004,4\ q^o$$

und die Grundlinie $CD = 40,5^o$

folglich ist die Höhe $EA = 1004,4 : \frac{40,5}{2} = 49,6^o$ Fig. 33.

§. 136.

Wenn man bey einem rechtwinkeligen Dreyecke ABC eine Kathete für die Grundlinie annimmt, so ist die andere Kathete die Höhe dieses Dreyeckes; folglich ist der Flächeninhalt eines rechtwinkeligen Dreyeckes gleich dem halben Producte aus beyden Katheten; nämlich $ABC = \frac{1}{2}AB \cdot AC$. 12.

§. 137.

Der Flächeninhalt eines Trapez ist gleich dem Producte aus der halben Summe der zwey parallelen Seiten, mit ihrem Abstande. 76.

Man ziehe eine Diagonale AC, so ist das Dreyeck

$$\left.\begin{aligned} ACB &= \tfrac{1}{2}AB.EC \\ \text{und } ACD &= \tfrac{1}{2}DC.(AF = EC) \end{aligned}\right\}\ \text{§. 135.}$$

daher $ACB + ACD = \frac{1}{2}AB \cdot EC + \frac{1}{2}DC \cdot EC$ (Rk. 47. I.)

oder das Trapez $ABCD = \frac{AB + DC}{2} \cdot EC$ (Rk. 158. 1).

Wenn man demnach die zwey gleichlaufenden Seiten eines Trapez addirt, diese Summe mit ihrem senkrechten Abstande multiplicirt, und das Product durch 2 theilet, so erhält man den Flächeninhalt desselben.

Da vermöge §. 91. 3) der Factor $\frac{AD + BC}{2} = mn =$ der mittlern arithmetischen Proportionale gesetzt werden kann, so erhält man auch den Flächeninhalt eines Trapez, wenn man in der Mitte zwischen den zwey gleichlaufenden Seiten eine Parallele zieht, und diese mit der Höhe desselben multiplicirt; es ist nämlich $ABCD = mn \cdot AB$, wenn AD und BC auf AB senkrecht stehen. 77.

§. 138.

Der Flächeninhalt eines jeden Viereckes ist gleich dem Producte aus einer Diagonale mit der halben Summe der Abstände der entgegen stehenden Winkel. 78.

Fig. 78. Denn es ist $ABCD = ACB + ACD$;

nun ist aber $ACB = AC \cdot \frac{1}{2}EB$

und $ACD = AC \cdot \frac{1}{2}DF$

folglich auch $ACB + ACD = AC.\frac{1}{2}EB + AC.\frac{1}{2}DF$, nämlich es ist $ABCD = AC.\frac{1}{2}(BE + DF)$. Man erhält demnach den Flächeninhalt eines jeden Viereckes, wenn man eine Diagonale mit der Summe der zwey aus den gegenüber stehenden Winkeln auf diese Diagonale gezogenen Senkrechten multiplicirt, und das Product durch 2 theilet.

79. Eben so ist der Flächeninhalt

von $NCDM = ND.\frac{1}{2}(Mn + Cm)$.

Es sey z. B. auf einem Maßstabe gemessen $ND = 180° 3'$, $Mn = 70° 1'$, und $Cm = 40° 2'$ gefunden worden; so ist der Flächeninhalt von $NCDM = \frac{180° 3'}{2}.(70° 1' + 40° 2') = \frac{180° 3'.110° 3'}{2}$ $= 9972\, q°\ 22{,}5\, q'$.

a) Ein Viereck $AgCB$ (Fig. 78.), mit einem eingehenden Winkel g, wird vortheilhaft berechnet, wenn man die größte Diagonale AC mit der halben Differenz der Abstände $\frac{1}{2}(FB - hg)$ der entgegen stehenden Winkel multiplicirt; es ist nämlich die Fläche $AgCB = AC.\left(\frac{EB - hg}{2}\right)$. Den Beweis hierüber können fleißige Anfänger nach den bereits bekannten Gründen schon selbst führen.

§. 139.

Den Flächeninhalt eines jeden unregelmäßigen Vieleckes AGK erhält man am schnellsten, wenn man dasselbe in so viele Vierecke als möglich zerlegt, wie z. B. $ABCN$, $NCDM$, $MDEL$ u. s. w, sodann den Flächeninhalt eines jeden insbesondere nach §. 138 berechnet, und endlich alle diese Inhalte addirt. Nicht so schnell, und auch nicht so richtig würde man den Flächeninhalt erhalten, wenn man jedes Dreyeck wie ABN, BCN, DNC u. s. w. nach §. 135. insbesondere berechnen wollte, weil man in diesem Falle doppelt so viel Multiplicationen zu machen, und beynahe um $\frac{1}{3}$ mehr Linien auf dem Maßstabe zu messen hätte, als im vorigen Falle.

III. Bestimmung des Flächeninhaltes regelmäßiger Vielecke. Fig.

§. 140.

Der Flächeninhalt eines jeden regelmäßigen Vieleckes ist gleich dem Producte aus dem Umfange mit der halben Senkrechten, welche aus dem Mittelpuncte auf was immer für eine Seite desselben gefällt wird.

Denn jedes regelmäßige Vieleck kann man in so viel vollkommen gleiche Dreyecke zerlegen, als es Seiten hat (§. 72. 2), und weil 29.
die Höhen aller dieser Dreyecke einander gleich sind; so ist das Siebeneck $ABHGA = AB \cdot \frac{1}{2}MH + BC \cdot \frac{1}{2}MH + CD \cdot \frac{1}{2}MH + DE \cdot \frac{1}{2}MH + EF \cdot \frac{1}{2}MH + FG \cdot \frac{1}{2}MH + GA \cdot \frac{1}{2}MH = \frac{1}{2}MH \cdot (AB + BC + CD + DE + EF + FG + GA) = \frac{1}{2}MH \cdot 7AB = \frac{7AB \cdot MH}{2}$, weil alle Seiten des Umfanges einander gleich sind vermög (§. 50.).

Setzt man daher bey einem regelmäßigen Vieleck von n Seiten eine Seite desselben $= a$, und die Senkrechte oder Höhe der Dreyecke $= h$; so ist der Umfang $= na = u$, und folglich der Flächeninhalt $= na \cdot \frac{1}{2}h = u \cdot \frac{1}{2}h$.

Man erhält also den Flächeninhalt eines regelmäßigen Vieleckes, wenn man den Umfang mit der aus dem Mittelpuncte auf eine Seite gezogenen Senkrechten multiplicirt, und dieses Product durch 2 dividirt.

Es sey von einem regelmäßigen Fünfeck eine Seite $= 15{,}3'$ und die Senkrechte $= 10{,}6'$, welche aus dem Mittelpuncte auf eine Seite gefällt wird; so ist der Umfang $= 5 \cdot 15{,}3'$, und der Flächeninhalt $= \frac{5 \cdot 15{,}3' \cdot 10{,}6'}{2} = 405{,}45\ q' = 405\ q'\ 65\ q''$.

§. 141.

Der Flächeninhalt des Kreises, oder die Kreisfläche ist gleich dem Producte aus der Länge des Umkreises mit dem halben Halbmesser, oder: sie ist gleich dem Producte aus dem Quadrate des Halbmessers mit dem Verhältnisse des Durchmessers zum Umkreise. 69.

Fig. Denn man kann den Kreis als ein regelmäßiges Vieleck von
69. unendlich vielen, unendlich kleinen Seiten betrachten, bey welchem vermöge §. 111. die Senkrechte MQ aus dem Mittelpuncte auf die Vielecksseiten gezogen, gleich dem Halbmesser $= h$, und dessen Umfang $= 2\,h \,.\, 3{,}14 = 2\,h\,\pi$ ist (vermöge §. 115 und 116.). Nun aber erhält man den Flächeninhalt eines regelmäßigen Vieleckes, wenn man seinen Umfang mit der halben Senkrechten multiplicirt, die aus dem Mittelpuncte auf eine der Vielecksseiten gezogen wird (§. 140.), folglich erhält man auch die Kreisfläche als ein regelmäßiges Unendlicheck, wenn man ihren Umfang $2\,h\,\pi$ mit dem halben Halbmesser $\frac{1}{2}h$ multiplicirt; es ist daher die Kreisfläche $f = 2\,h\,\pi \,.\, \frac{1}{2}h = h^2\,\pi$. Man erhält also den Flächeninhalt eines Kreises, dessen Halbmesser bekannt ist, wenn man den gegebenen Halbmesser zum Quadrat erhebt, und dieses mit der Verhältnißzahl 3,14 multiplicirt. Es sey z. B. der Halbmesser eines Kreises $=$ 20′; so ist dessen Flächeninhalt $= (20)^2 \,.\, \pi = 400 \,.\, 3{,}14 = 1256\,q$.

Setzt man den Durchmesser eines Kreises $= d$, so ist vermög §. 116. 1) dessen Umfang $= d\,\pi$, und die Kreisfläche

$$f = d\,\pi \,.\, \tfrac{1}{4}\,d = \frac{d^2}{4} \,.\, \pi.$$

80. Auch ist die Kreisfläche mit einem Dreyecke AMB gleichhaltig, dessen Grundlinie $AB = 2\,h\,\pi =$ dem Umfange des Kreises, und die Höhe $DC = MA = h =$ dem Halbmesser desselben ist.

a) Aus den bereits in diesem Abschnitte vorgetragenen Sätzen ist zu ersehen, daß der Flächeninhalt einer jeden Figur eigentlich durch die Multiplication gewisser in der Figur gemessenen geraden Linien bestimmt wird, und daß man nicht nöthig habe, sich irgend eine Fläche als Maßstab zu verfertigen, um vermittelst des Herumlegens desselben in der auszumessenden Figur, den Flächeninhalt zu finden; denn letzteres würde meistens sehr mühsam und doch unrichtig, ja in vielen Fällen unmöglich seyn. Das so eben Gesagte ist auch in Bezug auf die weiter unten folgende Körpermessung zu verstehen.

§. 142.

69. 1. Aufgabe. Aus dem gegebenen Halbmesser $AM = h = 15'$ eines Kreises und aus der Anzahl Grade eines Bogens $ANB = 48°$, den Flächeninhalt eines Kreisausschnittes $AMBNA$ zu finden.

Auflösung. Nach §. 116. 2) findet man die wirkliche Länge des Bogens $ANB = 12{,}56'$, diese multiplicire man mit dem halben Halbmesser $= \frac{1}{2}h = \frac{15'}{2}$, nämlich es ist

$12,56' . \frac{15'}{2} = 94,20\, q' = 94\, q'\, 29\, q'' =$ dem Flächeninhalte des Ausschnittes $AMBNA$. Fig. 69.

Denn der Flächeninhalt des Kreises hängt von seinem Halbmesser und der Länge des ganzen Umfanges ab, daher muß auch ein Ausschnitt als ein ähnlicher Theil desselben, von eben diesem Halbmesser und der Länge des dazu gehörigen Bogens abhängen; weil sowohl der Kreis als der Ausschnitt ganz auf eine und dieselbe Art erzeugt, und bloß durch die Größe, welche von der Länge der Bogen abhängt, verschieden sind. Nun aber besteht der Flächeninhalt des Kreises aus dem Producte der Länge des Umfanges mit dem halben Halbmesser; also erhält man auch den Flächeninhalt eines Kreisausschnittes, wenn man die Länge seines Bogens mit dem halben Halbmesser des Kreises multiplicirt.

Man erhält auch den Flächeninhalt des Ausschnittes, wenn man schließt: $360^\circ : 48^\circ = h^2\pi : x$ (nämlich, gleich wie die Kreisfläche zur Fläche des Ausschnittes von 48 Graden); daraus findet man den Inhalt des Ausschnittes $x = \frac{48 . h^2 \pi}{360} = \frac{2 . 15^2 . \pi}{15} = 2 . 15 . 3,14 = 30 . 3,14 = 94,2\, q' = 94\, q'\, 29\, q''$ wie oben.

2. Aufgabe. Aus dem Halbmesser $AM = h$ eines Kreises, der Sehne AB und der Anzahl der Grade des Bogens $ANB = 56^\circ$ eines Kreisabschnittes den Flächeninhalt desselben zu finden.

Auflösung. Den Flächeninhalt eines Kreisabschnittes $ABNA$ findet man, wenn man den Inhalt des Kreisausschnittes nach der vorigen Aufgabe bestimmt, hierauf den Inhalt des Dreyeckes AMB berechnet (§. 97 und 135), und diesen von jenem abzieht; es ist nämlich $ABNA = AMBNA - AMB$.

3. Aufgabe. Aus dem gegebenen Flächeninhalte $= 1256\, q'$ eines Kreises den Halbmesser oder Durchmesser desselben zu finden.

Auflösung. Es sey der zu suchende Halbmesser $= x$; so ist vermög §. 141 der Flächeninhalt $= x^2 . \pi$;

mithin $x^2 \pi = 1256\, q'$

und $x^2 = \frac{1256}{3,14} = 125600 : 314 = 400$,

und endlich $x = \sqrt{400} = 20'$; man findet nämlich aus dem Flächeninhalte eines Kreises seinen Halbmesser, wenn man den gegebenen Inhalt durch die Verhältnißzahl 3,14 dividirt, und aus dem Quotienten die Quadratwurzel zieht.

4. Aufgabe. Den Flächeninhalt eines Ringes $AaDdCeAa$ (Fig. 5.) zu bestimmen.

Fig. 5. Auflösung. Man setze den Halbmesser des größern Kreises $AM = H$, und den Halbmesser des kleinern $aM = h$,

so ist die Fläche des erstern $= H^2\pi$

und die Fläche des zweyten $= h^2\pi$

daher die Fläche des Ringes $= H^2\pi - h^2\pi = \pi(H^2 - h^2)$ $= (H+h)(H-h)\pi$; man erhält also den Flächeninhalt eines Ringes, wenn man den kleinern Halbmesser zu dem größern addirt, sodann von ihm auch abzieht, und diese zwey Zahlen mit einander, und auch noch mit der Verhältnißzahl 3,14 multiplicirt.

Zweyter Abschnitt.

Von der Vergleichung und Verwandlung geradliniger Figuren.

§. 143.

Die Flächeninhalte der Dreyecke verhalten sich so gegen einander, wie die Producte aus den Grundlinien mit ihren Höhen.

81. Denn man bezeichne an was immer für einem Dreyecke ABC der Kürze wegen die Grundlinie AB mit G, die Höhe DC mit H, und den Flächeninhalt desselben mit F; so ist $F = \frac{1}{2}G.H$. Desgleichen, wenn an einem andern Dreyecke abc die Grundlinie $ab = g$, die Höhe $dc = h$, und der Flächeninhalt $= f$ gesetzt wird; so ist ebenfalls $f = \frac{1}{2}g.h$, vermög §. 135;

und verm. Vorigen ist $F = \frac{1}{2}G.H$

daher auch $F:f = \frac{1}{2}G.H : \frac{1}{2}g.h$ (Rk. 72. Grundſ. I.)

oder $F:f = G.H : g.h$ (Rk. 268. V. und 269. 4.);

folglich verhalten sich die Flächeninhalte der Dreyecke so gegen einander, wie ihre Producte aus den Grundlinien mit den Höhen.

Aus diesem folgt:

1) Wenn an zwey Dreyecken die Grundlinien gleich sind, so verhalten sich ihre Flächeninhalte so gegen einander, wie ihre Höhen.

Denn man setze $G = g$,

so verhält sich $F:f = G.H : G.h$ (Rk. 40. Grundſ. II.)

und auch $F:f = H:h$ (Rk. 268. VI.).

2) Sind hingegen die Höhen gleich, so verhalten sich die Dreyecke wie ihre Grundlinien, wenn nämlich $H=h$ ist, so verhält sich $F:f=G:g$. Fig. 81.

3) Wenn die Flächeninhalte zweyer Dreyecke einander gleich sind, so verhalten sich ihre Grundlinien, wie umgekehrt die Höhen.

Denn man setze oben in der Grund-Proportion $f=F$;
so verhält sich $F : F = G.H : g.h$
daher ist $G.H = g.h$ (vermöge Rk. 265. 2.)
und folglich $G : g = h : H$
oder $H : h = g : G$ } (Rk. 267.)

§. 144.

Dreyecke, die einen gleichen Winkel haben, verhalten sich wie die Producte aus den Seiten, welche den gleichen Winkel einschließen. Es sey der Winkel $A=a$, so verhält sich $ABC : abc = AC.AB : ab.ac$.

Denn es verhält sich $ABC : abc = AB.CD : ab.cd$, vermög §. 143.

Nun aber sind die Dreyecke ADC und adc einander ähnlich;
daher verhält sich $AC : CD = ac : cd$;
und es ist $cd = \frac{CD.ac}{AC}$.

Setzt man diesen Werth für cd in die obige Proportion;
so verhält sich $ABC : abc = AB.CD : ab.\frac{CD.ac}{AC}$ (Rk. 40. II.)
und endlich $ABC : abc = AB.AC : ab.ac$ (Rk. 269. 4.)

§. 145.

Ähnliche Dreyecke verhalten sich so gegen einander, wie die Quadrate ihrer gleichliegenden Seiten, oder ihrer andern gleichliegenden Linien.

Denn es verhält sich $ABC : abc = AB.CD : ab.cd$ (§. 143.)
Vermöge der vorausgesetzten Ähnlichkeit der Dreyecke
verhält sich $AB : AC = ab : ac$
und auch $AC : ac = CD : cd$;

daher auch $AB : ab = CD : cd$; und es ist $cd = \frac{CD.ab}{AB}$.

Setzt man diesen Werth für cd in die obige Proportion,

Fig. 81. so verhält sich $ABC : abc = AB . CD : ab . \frac{CD . ab}{AB}$
und auch $ABC : abc = AB^2 : ab^2$.

Da ferner $AC : ac = AB : ab = BC : bc = CD : cd$
oder $AC^2 : ac^2 = AB^2 : ab^2 = BC^2 : bc^2 = CD^2 : cd^2$
(vermöge Rk. 268. VII.) Statt findet; so verhalten sich endlich die Dreyecke $ABC : abc = AC^2 : ac^2 = BC^2 : bc^2 = CD^2 : cd^2$.

a) Daß alles dieses auch bey Parallelogrammen Statt findet, erhellet daraus, weil jedes Parallelogramm als das Doppelte eines Dreyeckes von eben derselben Grundlinie und Höhe zu betrachten ist, und (vermöge Rk. 268. V.) zwey Größen sich verhalten wie ihre Zweyfachen u. s. w.

§. 146.

Die Flächeninhalte ähnlicher Vielecke verhalten sich gegen einander, wie die Quadrate ihrer gleichliegenden Seiten oder ihrer andern gleichliegenden Linien.

68. Denn man zerlege die ähnlichen Vielecke durch gleichliegende Diagonalen in ähnliche Dreyecke (§. 107): so verhält sich

$$\left.\begin{aligned} ABC : abc &= AB^2 : ab^2 \\ ACD : acd &= AC^2 : ac^2 \\ ADE : ade &= AD^2 : ad^2 \end{aligned}\right\} \text{(§. 145.)}$$
u. s. w.

Nun verhält sich auch vermög §. 77.
$AB : ab = AC : ac = AD : ad$ u. s. f., oder
$AB^2 : ab^2 = AC^2 : ac^2 = AD^2 : ad^2$ u. s. w., daher

$$\left.\begin{aligned} ABC : abc &= AB^2 : ab^2 \\ ACD : acd &= AB^2 : ab^2 \\ ADE : ade &= AB^2 : ab^2 \end{aligned}\right\} \text{(Rk. 40. Grundf. II.)}$$
u. s. w.; folglich vermög Rk. 271, auch

$$(ABC + ACD + ADE + ..) : (abc + acd + ade ..) = ABC : abc$$
$$= AB^2 : ab^2$$
oder $F : f = AC^2 : ac^2$
u. s. w., wenn man der Kürze wegen die Flächen der Vielecke mit F und f bezeichnet.

§. 147.

Ist demnach zu was immer für einem Vielecke $ABDG$ ein ähnliches $abdg$ zu verzeichnen, wobey jede Linie nur die Hälfte

ihrer gleichliegenden wird, so wird dadurch der Flächeninhalt $= f$ Fig.
viermahl kleiner, als der Flächeninhalt $= F$ der erstern Figur ist. 68.

Denn es verhält sich $F : f = AB^2 : ab^2$ vermöge des Vorigen.
Nun verhält sich aber $AB : ab = 2 : 1$ vermöge Construction,
oder $AB^2 : ab^2 = 2^2 : 1^2$
nämlich $AB^2 : ab^2 = 4 : 1$

folglich auch $F : f = 4 : 1$,

daraus findet man.... $f = \frac{F}{4}$, das heißt: **wenn ein Vieleck oder eine Figur so verkleinert wird, daß jede Linie in der verkleinerten Figur nur die Hälfte ihrer gleichliegenden in der gegebenen ist; so ist der Flächeninhalt der reducirten Figur nur der vierte Theil von dem Flächeninhalte der gegebenen Figur**, oder 4 Mahl kleiner als dieser. Wird demnach jede gleichliegende Linie 3 Mahl kleiner gemacht, so wird der Flächeninhalt 9 Mahl kleiner, weil $3^2 = 9$ ist. Eben so wird der Flächeninhalt einer Figur 16 Mahl, 25 Mahl, 36 Mahl u. s. w. kleiner oder größer, wenn man jede gleichliegende Linie 4 Mahl, 5 Mahl, 6 Mahl u. s. f. kleiner oder größer, als in der gegebenen Figur macht.

§. 148.

1) **Die Flächeninhalte der regelmäßigen Vielecke von einerley Gattung verhalten sich so gegen einander, wie die Quadrate ihrer Seiten, wie die Quadrate der Halbmesser, wie die Quadrate der Durchmesser der herumgeschriebenen, oder auch der eingeschriebenen Kreise.** 69.

Denn es seyen AB und ab Seiten regelmäßiger Vielecke von einerley Gattung, wovon der Flächeninhalt des ersten $= F$, und der Halbmesser des herumgeschriebenen Kreises $= AM$, der Flächeninhalt des zweyten $= f$, und der Halbmesser $= am$ ist, so verhält sich vermöge §. 146.

$F : f = AB^2 : ab^2$. Nun ist $ABM \sim abm$ (§. 107.);
daher $AM : AB = am : ab$
oder $AM : am = AB : ab$
oder $AM^2 : am^2 = AB^2 : ab^2$

folglich auch $F : f = AM^2 : am^2$.

Fig. 69. Und da auch $AM : am = 2AM : 2am = PQ : pq$
oder $AM^2 : am^2 = PQ^2 : pq^2$ Statt findet;

so verhält sich auch $F : f = PQ^2 : pq^2$. Und so auch bey den eingeschriebenen Kreisen.

2) Da alle Kreise einander ähnlich, und als regelmäßige Vielecke von unendlich vielen Seiten zu betrachten sind, so verhalten sich die Kreisflächen wie die Quadrate ihrer Halbmesser, wie die Quadrate ihrer Durchmesser, wie die Quadrate der Sehnen von ähnlichen Bogen u. s. w.

§. 149.

1. Aufgabe. Es ist der Halbmesser $= h = 25'$ eines Kreises gegeben, man soll den Flächeninhalt x eines andern Kreises finden, dessen Halbmesser 3 Mahl so lang ist.

Auflösung. Da der gegebene Halbmesser $= h = 25$ ist, so ist der Flächeninhalt dieses Kreises $= h^2 . \pi = 25 . 25 . 3{,}14 = 1962{,}5\, q' = f$ vermög (§. 141.).

Nun verhält sich $f : x = h^2 : (3h)^2$
oder $f : x = 25^2 : 9 . 25^2$
nämlich $1962{,}5 : x = 1 : 9$ (Rk. 268. VI.)
folglich ist $x = 9 . 1962{,}5 = 17662{,}5\, q'$.

2. Aufgabe. Umgekehrt, aus dem Flächeninhalte $F = 1256\, q'$ eines Kreises den Halbmesser eines andern Kreises zu finden, dessen Inhalt f, 4 Mahl kleiner als der gegebene ist.

Auflösung. Man bestimme nach §. 142. 3) aus dem gegebenen Flächeninhalte $F = 1257\, q'$ den dazu gehörigen Halbmesser $= h$, es ist nämlich $h = \sqrt{\left(\frac{1256}{3{,}24}\right)} = \sqrt{400} = 20'$.

Nun sey der zu suchende Halbmesser $= x$,
so verhält sich $F : f = h^2 : x^2$
oder $1256 : 314 = 400 : x^2$, weil $\frac{1256}{4} = 314$ ist;
daraus ist $x^2 = \frac{314 \cdot 400}{1256} = \frac{400}{4} = 100\, q'$
und endlich $x = 10'$.

§. 150.

Wenn man auf jeder Seite eines rechtwinkeligen Dreyeckes ein Quadrat verzeichnet, so ist das Quadrat der Hypothenuse eben so groß, als die Quadrate der beyden Katheten zusammen genommen.

Denn man ziehe aus dem rechten Winkel ABC die Senkrechte BK auf die gegenüber liegende Seite des größten Quadrates, so wird dieses in zwey Rechtecke getheilt, deren jedes seinem anliegenden Quadrate gleich ist, wie aus dem Beweise erhellen wird. Man ziehe ferner aus dem äußersten Winkel eines der beyden Rechtecke zwey Diagonalen FL und FB; eine in das Rechteck selbst, die andere aber in den Scheitel des rechten Winkels des gegebenen Dreyeckes, so ist das Dreyeck $AFB = AFL$ (§. 133. 1) . . . . . (A). Fig. 82.

Hierauf ziehe man aus der äußersten Spitze D des diesem Rechtecke anliegenden Quadrates zwey Diagonalen DB und DC; eine in das Quadrat selbst, die andere aber in die gegenüber liegende Spitze C des gegebenen Dreyeckes, so ist aus demselben Grunde auch das Dreyeck $ADC = ADB$ . . . . (B).

Da ferner der Winkel $m = n$
und der Winkel $x = x$

also $m + x = n + x$
und $AD = AB$
wie auch $AC = AF$ ist:

so ist das Dreyeck $ADC = AFB$ (vermög §. 23. Grundſ. 1).
Vermög (B) ist $ADC = ADB$

daher $AFB = ADB$ (Rk. 40. Grundſ. III.)
und vermög (A) ist $AFB = AFL$

also auch $AFL = ADB$
und ferner $2AFL = 2ADB$ (Rk. Grundſ. 63. I.);
es ist also das Rechteck AK = dem Quad. AE;
aus gleichem Grunde ist LG = „ „ CH;

folglich ist $AK + LG = AE + CH$ (Rk. 47. I.);
oder $ACGF = ADEB + BCIH$
oder auch $AC^2 = AB^2 + BC^2$, vermög §. 124.;
folglich ist das Quadrat auf der Hypothenuse gleichhaltig mit den Quadraten der beyden Katheten.

§. 151.

Dieses findet nicht nur allein bey Quadraten, sondern auch bey allen ähnlichen Figuren Statt, die auf den Seiten eines rechtwinkeligen Dreyeckes verzeichnet werden; es ist nämlich die Figur auf der Hypothenuse der Summe der zwey ähnlichen Figuren auf den beyden Katheten zusammen genommen gleich; so z. B. ist das Dreyeck $ABD = AEC + CFB$. 83.

Fig. Denn vermöge §. 145. verhält sich

83. $AB^2 : AC^2 = ADB : AEC$; und es ist $AEC = \frac{AC^2 . ADB}{AB^2}$; ferner $AB^2 : CB^2 = ADB : CFB$; daraus ist $CFB = \frac{CB^2 . ADB}{AB^2}$;

folglich ist $AEC + CFB = \frac{AC^2 . ADB}{AB^2} + \frac{CB^2 . ADB}{AB^2} =$ $ADB \frac{(AC^2 + CB^2)}{AB^2} = \frac{ADB . AB^2}{AB^2} = ADB$, weil $AC^2 + CB^2 = AB^2$ ist, vermöge §. 150.

Eben so läßt sich erweisen, daß die halbe Kreisfläche $ACBA$ der Summe aus der halben Kreisfläche auf AC, und aus der halben Kreisfläche auf CB gleich ist, daß nämlich $(q + r + p) = (n + q) + (p + m)$ ist; und wenn man beyderseits $q + p$ abzieht, so ist folglich $r = n + m$; es ist also das rechtwinkelige Dreyeck r den zwey mondförmigen Figuren n und m zusammen genommen gleich, welche man von ihrem Erfinder die Monde des Hippokrates (die hippokratischen Monde) zu nennen pflegt.

§. 152.

84. Nun kann man eine Figur verzeichnen, welche mehrern ähnlichen Figuren zusammen genommen gleichhaltig und zugleich ähnlich ist.

Dieß zu bewirken, darf man nur zwey gleichliegende Seiten AB und BC der ersten zwey gegebenen ähnlichen Figuren unter einem rechten Winkel zusammenstellen, und die Hypothenuse AC führen; so wird diese die gleichliegende Seite einer Figur vorstellen, deren Fläche mit den Flächen der zwey ähnlichen Figuren auf den gleichliegenden Seiten AB und BC gleichhaltig ist. Wenn man sonach CD senkrecht auf AC setzet, diese Senkrechte der gleichliegenden Seite der dritten ähnlichen Figur gleich macht, und die Hypothenuse AD zieht; so ist diese wieder die gleichliegende Seite einer Figur, welche mit den drey gegebenen zusammen genommen an Fläche gleich, und auch ähnlich ist, wenn man die Verzeichnung nach §. 119 vornimmt u. s. w. Wären z. B. AB, BC und CD Halbmesser von drey Kreisen, so würde die mit dem Halbmesser AD beschriebene Kreisfläche den andern dreyen zusammen genommen gleich seyn.

a) Hierauf gründet sich die Methode aus verschiedenen Baumdurchmessern den mittlern aus der Gleichung $x = \sqrt{\frac{am^2 + bn^2 + cp^2 + ..}{S}}$ zu

zu finden, wobei a, b, c, die Anzahl der Stämme von einerlei Durchmesser m, n, p, die verschiedenen Durchmesser, s die Summe aller Stämme, und x endlich den mittleren Durchmesser selbst bezeichnen. Man erhält das gewünschte Resultat sehr leicht und schnell, wenn man aus früher berechneten Tafeln die betreffenden Kreisflächen addirt, und durch die Anzahl der Stämme dividirt; so ergibt sich der gesuchte mittlere Durchmesser aus der Tafel selbst. Man sehe die Kubiktafeln meines Taschen-Dendrometers. Wien 1834, bey Heubner. Fig. 84.

§. 153.

Soll eine Figur verzeichnet werden, welche zwey ähnlichen Figuren ähnlich, und dem Unterschiede ihrer Flächen gleich ist, so ziehe man auf einer Seite AB der größten Figur einen Halbkreis, auf diesen trage man aus dem Endpuncte A des Durchmessers die gleichliegende Seite der kleinern gegebenen Figur als Sehne AC auf, ziehe die andere Sehne CB, und verzeichne auf dieser, als der gleichliegenden Seite, eine ähnliche Figur; so wird diese wegen des rechtwinkeligen Dreyeckes ACB dem Unterschiede der ähnlichen Figur auf AB und der ähnlichen Figur auf AC gleich seyn (§. 152.). 53.

§. 154.

Zum Beschluß dieses Abschnittes folgen nun von der Vergleichung und Verwandlung geradliniger Figuren noch einige Aufgaben.

1. Aufgabe. Ein gegebenes Vieleck mit bloß ausgehenden Winkeln, z. B. das Fünfeck $ABCDE$ in ein Dreyeck von gleichem Inhalte zu verwandeln, deren eine Seite mit einer Seite des gegebenen Vieleckes in einander falle. 85.

Auflösung. Man verlängere (wenn es nicht bestimmt ist) eine beliebige Seite AE des gegebenen Vieleckes vor- und rückwärts unbestimmt lang, ziehe die Diagonalen AC und CE, zu diesen die Parallelen BF und DG, und endlich auch die Geraden CF und CG; so ist am Flächeninhalte das Dreyeck $FCG = ABCDE$.

Denn es ist das Dreyeck $BFA = BFC$ (§. 133. 1.)
und $BFm = BFm$;
daher auch $BFA - BFm = BFC - BFm$ (Rk. 54. I.)
es ist nämlich $FmA = BmC$.
Desgleichen ist das Dreyeck $DGE = DGC$
und $DnG = DnG$
folglich auch $DGE - DnG = DGC - DnG$,
es ist nämlich $EnG = DnC$.

Fig. 85. Nun aber ist $ABCDE = AmCnE + BmC + DnC$; daher auch $ABCDE = AmCnE + FmA + EnG$ (Nr. 40. II.); folglich ist $ABCDE = FCG$.

86. 2. Aufgabe. Ein gegebenes Vieleck $ABCDEFG$ mit ein- und ausgehenden Winkeln in ein Dreyeck von gleichem Inhalte zu verwandeln: dessen Grundlinie mit der Seite AG, oder ihrer Verlängerung zusammenfallen solle.

Auflösung. Man bringe zuerst die eingehenden Winkel hinweg, das heißt, man verwandle die gegebene Figur in eine andere von gleichem Inhalte, die bloß ausgehende Winkel enthält. Um dieß zu bewirken, verbinde man die zwey Scheitel G und E der ausgehenden Winkel G und E durch eine Gerade, führe zu dieser durch den Scheitel des eingehenden Winkels F eine Parallele Fm, und ziehe auch die Gerade Gm,

so ist das Dreyeck $GFE = GEm$.
und $GEn = GEn$

daher auch $GFE - GEn = GEm - GEn$
nämlich es ist $GnF = Enm$.

Auf diese Weise ist das gegebene Vieleck $ABCDEFG$ in ein anderes $AECDmG$ verwandelt worden, welches um einen eingehenden Winkel weniger enthält und doch mit der gegebenen Figur gleichhaltig ist. Nach eben diesem Verfahren bringe man auch alle übrige eingehende Winkel, wenn deren mehre in der Figur vorkommen, hinweg; so erhält man zuletzt eine Figur $ABpmG$ mit bloß ausgehenden Winkeln.

Da nun hier nach der Bedingung auf die Seite AG oder deren Verlängerung die Grundlinie des zu suchenden Dreyeckes fallen soll, so verlängere man AG von beyden Seiten unbestimmt, und verfahre übrigens ganz nach der vorhergehenden Aufgabe 1.; so wird das Dreyeck qpr am Flächeninhalte dem gegebenen Vielecke $ABCDEFG$ gleich seyn.

3. Aufgabe. Ein Dreyeck, dessen Grundlinie $= g = 15° \; 2'$ und die Höhe $= h = 9° \; 5'$ gegeben sind, in ein Quadrat von gleichem Inhalte zu verwandeln; nämlich die Seite eines am Flächeninhalte gleich großen Quadrates zu finden.

Auflösung. Es sey die Seite des gesuchten Quadrates $= x$, so ist $x^2 = \frac{1}{2} gh$, folglich $x = \sqrt{\frac{1}{2} gh} = \sqrt{\frac{1}{2}(15° \, 2' \times 9° \, 5')}$ $= 8{,}63° = 8° \; 4' =$ der Seite des gesuchten Quadrates.

Oder: Wenn bloß die Linien g und h ohne in Zahlen ausgedrückt gegeben sind, und man wäre mit keinem geometrischen Maßstabe ver-

sehen, so suche man zwischen g und $\frac{1}{2}h$, oder zwischen $\frac{1}{2}g$ und h nach §. 91. 1.) die mittlere Proportional-Linie, so ist diese die gesuchte Seite des Quadrates, welches mit dem gegebenen Dreyecke gleichhaltig ist. Fig.

Eben so läßt sich jedes gegebene Parallelogramm in ein Quadrat von gleichem Inhalte verwandeln, wenn man zwischen der Grundlinie und der Höhe des gegebenen Parallelogramm die mittlere Proportionale suchet, und auf dieser ein Quadrat verzeichnet.

4. Aufgabe. Es ist der Flächeninhalt eines Kreises $= f =$ 249 q' gegeben, man soll ein Quadrat finden, welches nur $\frac{2}{3}$ seiner Fläche enthält.

Auflösung. Es sey die Seite des zu suchenden Quadrates $=$ x, so ist $x^2 = 249 \cdot \frac{2}{3}$; und $x = \sqrt{249 \cdot \frac{2}{3}} = 1{,}288' = 1'3''5''',5 =$ der Seite eines Quadrates, welches am Flächeninhalte nur $\frac{2}{3}$ der gegebenen Kreisfläche enthält. (§. 124. und Rk. 237. II.)

5. Aufgabe. Ein regelmäßiges Vieleck, z. B. ein Fünfeck zu verzeichnen, welches einen gegebenen Flächeninhalt $= f$ enthält.

Auflösung. Man beschreibe mit einem beliebigen Halbmesser $= h$ einen Kreis, in diesen verzeichne man nach §. 101. 4) ein regelmäßiges Fünfeck, und messe dabey die erforderlichen Linien auf einem geometrischen Maßstabe, um den Flächeninhalt berechnen zu können (§. 140.) Es sey dieser berechnete Inhalt $= F$, sodann schließe man: Der berechnete Flächeninhalt des verzeichneten regelmäßigen Fünfeckes verhält sich zu dem gegebenen Flächeninhalte, gleich wie das Quadrat des angenommenen Halbmessers zu dem Quadrate eines andern Halbmessers sich verhält; nämlich $F : f = h^2 : x^2$, daraus ist $x^2 = \frac{h^2 f}{F}$, und $x = h\sqrt{\frac{f}{F}} =$ dem Halbmesser eines andern Kreises.

Wird nun mit diesem Halbmesser ein Kreis beschrieben, und in demselben ein regelmäßiges Fünfeck verzeichnet (§. 101. 4.), so wird dasselbe den gegebenen Flächeninhalt enthalten.

6. Aufgabe. Aus den gegebenen drey Seiten $AC = 84$, $AB = 127$, und $BC = 106$ Klaftern eines Dreyeckes ABC, den Flächeninhalt desselben zu finden. 58.

Auflösung. Man bestimme nach §. 97 erst einen Abschnitt $AD = 47$, und auch die Höhe $DC = \sqrt{(AC^2 - AD^2)} = \sqrt{(AC + AD)(AC - AD)} = \sqrt{131 \cdot 37} = \sqrt{4847} = 69{,}6°$;

Fig. so ist der Flächeninhalt des Dreyeckes $ABC = \frac{1}{2} . 127 . 69{,}6 = 4419{,}6\ q°$.

7. Aufgabe. Ein gegebenes Vieleck in ein anderes ähnliches dergestalt zu verwandeln, daß der Flächeninhalt F des gegebenen zu dem Flächeninhalte f des verwandelten Vieleckes sich verhalte, wie $m : n$, z. B. 5 : 3.

Auflösung. Es sey eine Seite des gegebenen Vieleckes $= a = 410$, und die gleichliegende Seite des zu suchenden Vieleckes $= x$, so verhält sich $F : f = a^2 : x^2$ (§. 146.)

und auch $F : f = m : n$ vermög Bedingung;

folglich auch $a^2 : x^2 = m : n$.

und $x^2 = \frac{a^2\, n}{m}$;

daraus findet man $x = a\sqrt{\frac{n}{m}}$; das ist: wenn man jede Seite oder Linie des gegebenen Vieleckes mit der Quadratwurzel aus dem gegebenen Verhältnisse multiplicirt; so erhält man jede gleichliegende Seite oder Linie des gesuchten ähnlichen Vieleckes.

Hier in diesem Beyspiele ist

$x = 410 . \sqrt{\frac{3}{5}} = 410 . \sqrt{0{,}6} = 410 . 0{,}77 = 315{,}5$; man muß nämlich die Länge einer jeden Linie des Vieleckes, welche man in Einheiten eines beliebigen Maßstabes ausdrückt, mit dem Decimalbruche 0,77 multipliciren, um die gleichliegende des gesuchten ähnlichen Vieleckes zu erhalten.

a) Aus dem bisher Gesagten leuchtet es nun ein, daß man auch jede Figur in ein Dreyeck von gleichem Flächeninhalte verwandeln könne; wenn man nämlich die Größe des Inhalts der gegebenen Figur in zwey Factoren auflös't, und einen für die Grundlinie des Dreyeckes, den andern aber doppelt genommen für die Höhe desselben annimmt.

8. Aufgabe. Aus dem gegebenen verjüngten Maßstabe einer Zeichnung (Karte), und dem Verkleinerungsverhältnisse der Kopie zum Originale, den Maßstab zur Kopie zu bestimmen.

52. u. 71. Auflösung. Es sey **Fig. 52.** der gegebene Maßstab und das Verhältniß der Kopie zum Originale **Fig. 71.** wie $m : n$ (z. B. 2 : 3.) Man nehme eine beliebige Länge de vom Original-Maßstabe (am zweckdienlichsten eine Hauptabtheilung §. 85.), theile sie vermög §. 84 in $n = 3$ gleiche Theile, errichte in dem m ten, (2ten) Theilungspuncte D (**Fig. 53.**) eine Senkrechte DC, beschreibe mit der halben Linie $de = AM$ einen Kreisbogen, ziehe die Sehne

CB; so ist diese die Länge einer Hauptabtheilung des verjüngten Maßstabes für die Kopie. Fig. 52. u. 71.

Denn es verhält sich $DB : CB = CB : AB$ (vermög §. 86. 2)
und auch $\frac{2}{3} AB : CB = CB : AB$,
daher ist $CB^2 = \frac{2}{3} AB^2$,
endlich ist $CB = AB \sqrt{\frac{2}{3}}$ wie in der Aufg. 7.

Da sich die Flächen ähnlicher Vielecke so gegen einander verhalten, wie die Quadrate der gleichliegenden Seiten, und da CB und AB als gleichnamige Theile der Maßstäbe für solche Seiten anzusehen sind,

so verhält sich $f : F = CB^2 : AB^2$ (§. 146.),
und auch $f : F = 2 : 3$ vermög Bedingung;

folglich $CB^2 : AB^2 = 2 : 3$
endlich $CB^2 = \frac{2}{3} AB^2$ wie vorhin.

Nun wird die weitere Ausführung des Maßstabes nach §. 85. vollführt.

9. Aufgabe. Auf ähnliche Weise einen Maßstab für die Vergrößerung eines Originals zu bestimmen.

Auflösung. Man verzeichne einen rechten Winkel ABC (Fig. 130) und trage wieder eine Hauptabtheilung des Original-Maßstabes auf beyde Schenkel bis A und 1, ziehe die Hypothenuse $A\,1$, so ist diese die Hauptabtheilung für den Maßstab der Kopie, welche (der Fläche nach) 2 Mahl so groß ist, als das Original. Nimmt man diese Hypothenuse $A1$, und trägt sie aus dem Scheitel B auf einen Schenkel, z. B. bis 2, und zieht wieder die Hypothenuse $A2$, so ist diese die Hauptabtheilung des Maßstabes der Kopie, die 3 Mahl so groß als das Original ist u. s. w.

Denn es ist $A1^2 = AB^2 + B1^2 = AB^2 + AB^2 = 2AB^2$; und ferner $A2^2 = AB^2 + B2^2 = AB^2 + A1^2 = AB^2 + 2AB^2 = 3AB^2$ u. s. f.

10. Aufgabe. Ein Dreyeck ABC in n, z. B. in 5 gleiche Theile so zu theilen, daß die Theilungslinien alle in eine Spitze des Dreyeckes zusammen laufen. 87.

Auflösung. Man theile, wenn es nicht bestimmt ist, eine beliebige Seite AB des Dreyeckes in den Puncten $d, e, f, g,$ nach §. 84 3.) in $n = 5$ gleiche Theile, verbinde diese Theilungspuncte mit der Spitze des gegenüber stehenden Winkels durch gerade Linien, so wird dadurch das gegebene Dreyeck in n gleiche Theile getheilt; denn alle diese Dreyecke haben gleiche Grundlinien, und eine

Fig. 87. nämliche Höhe; folglich sind sie einander am Flächeninhalte gleich, vermög (§. 133. 3.).

Wäre das Dreyeck in zwey solche Theile zu theilen, die sich wie $p:q$, z. B. wie 2:3 verhalten sollen, so theile man eine Seite nach §. 84. 4.) in $p+q=2+3=5$ gleiche Theile, und verbinde, hier in diesem Falle, den p ten = 2ten Theilungspunct e mit der gegenüberstehenden Spitze des Winkels C durch die Gerade eC; so ist dadurch das Dreyeck in zwey gleiche Theile AeC und eBC getheilt, die sich wie $p:q$, das ist, wie 2 : 3 verhalten (§. 143. 2.). Eben dieses ist zu beachten, wenn ein Dreyeck in mehre Theile zu theilen wäre, die sich z. B. wie $m:n:p:q$, u. s. w. verhalten sollen.

a) Es versteht sich von selbst, daß solche Verhältnisse, die in Brüchen ausgedrückt sind, vorher in ganzen Zahlen vorgestellt werden müssen (Rk. 253. 2.).

81. 11. Aufgabe. Ein Dreyeck ABC in m, z. B. in 3 gleiche Theile so zu theilen, daß die Theilungslinien mit einer Seite des Dreyeckes parallel laufen.

Auflösung. Man denke sich die Theilungslinien ef und gh in der verlangten Eigenschaft gezogen, so ist das Dreyeck $CAB \sim Cef \sim Cgh$,

und es verhält sich $CAB : Cef = CA^2 : Ce^2$ (§. 145.),

und auch $CAB : Cef = 3 : 1$, vermög Bedingung;

daher auch $3 : 1 = CA^2 : Ce^2$,

daraus findet man $Ce^2 = \frac{1}{3}\, CA^2\ (= \frac{1}{3}.CA.CA)$

und endlich $Ce = CA.\sqrt{\frac{1}{3}}$.

Auf gleiche Weise findet man $Cg = CA.\sqrt{\frac{2}{3}}$. Man trage demnach die gefundenen Werthe von C nach e, und von C nach g, ziehe durch diese Puncte die Geraden ef und gh mit AB parallel; so ist das Dreyeck CAB in drey gleiche Theile getheilt, in welchem die Theilungslinien mit einer Seite desselben parallel laufen.

12. Aufgabe. Von einem Dreyecke ABC, dessen Flächeninhalt $= F$ bekannt ist, ein Stück Cef von einem gegebenen Flächeninhalte $= f$ dergestalt abzuschneiden, daß die Theilungslinie ef mit der Grundlinie AB des gegebenen Dreyeckes parallel laufe.

Auflösung. Man denke sich die Gerade ef von der verlangten Eigenschaft gezogen, so ist das Dreyeck $ABC \sim Cef$

und es verhält sich $F : f = AC^2 : eC^2$;

daraus findet man $eC^2 = \dfrac{AC^2.f}{F}$

und $eC = AC.\sqrt{\dfrac{f}{F}}$; man erhält nämlich

den Punct *e*, durch welchen die Theilungslinie mit der Grundlinie *AB* parallel geführt werden soll, wenn man den Inhalt des abzuschneidenden Dreyeckes durch den Inhalt des gegebenen Dreyeckes dividirt, aus dem Quotienten die Quadratwurzel zieht, diese mit der Seite *AC* multiplicirt, und dann die so gefundene Länge *eC* aus *C* auf diese nämliche Seite *AC* trägt. Es sey z. B. $F = 4414$, und $f = 2207$, und $AC = 84$; so ist $eC = 84 \,.\, \sqrt{\frac{2207}{4414}} = 84 \,.\, \sqrt{\frac{1}{2}} = 84 \,.\, \sqrt{0,5} = 84 \,.\, 0,707 = 59,39$. Fig.

13. Aufgabe. Von einem Dreyecke *ABD* ein anderes *Dgh* dergestalt abzuschneiden, daß die Theilungslinie *hg* durch einen in der Seite *AD* gegebenen Punct *h* gehe, und daß das abgeschnittene Dreyeck *hDg* zu dem ganzen *ABD* sich verhalte, wie $m : n$, z. B. wie $2 : 5$. 83.

Auflösung. Man denke sich die Gerade *hg* von der verlangten Eigenschaft gezogen, so verhält sich

das Dreyeck $hDg : ABD = Dh.Dg : DA.DB$ (§. 144.),

und auch $hDg : ABD = 2 : 5$ vermög Bedingung;

folglich auch $2 : 5 = Dh.Dg : DA.DB$

daraus folgt endlich $Dg = \frac{2.DA.DB}{5Dh}$. Sind nun *DA*, *DB* und *Dh* auf einem Maßstabe bestimmt, so läßt sich nach eben diesem Maßstabe auch *Dg* durch die Rechnung finden. Es sey $DA = 77$, $DB = 90$, und $Dh = 46$; so findet man $Dg = \frac{2.77.90}{5.46} = 60,26$, welche man von *D* bis *g* tragen, sodann *g* mit *h* durch eine Gerade verbinden muß.

Die unbekannte Linie *Dg*, oder der Punct *g* kann auch geometrisch auf folgende Art bestimmt, es kann nämlich obige Gleichung in die Proportion $5Dh : 2DA = DB : Dg$ aufgelöst werden. Man suche demnach vermög §. 84. 1.) zu der 5fachen *Dh*, zu der 2fachen *DA*, und zu *DB* die vierte Proportional-Linie, trage diese von *D* nach *g*; so wird *g* mit *h* durch eine Gerade verbunden, ebenfalls das verlangte Dreyeck *Dhg* abschneiden.

14. Aufgabe. Ein Dreyeck in drey Theile, die sich verhalten wie $m : \frac{n}{p} : \frac{r}{q}$ (z. B. $2 : \frac{1}{2} : \frac{2}{3}$) so zu theilen, daß die Theilungslinien aus einem im Dreyecke liegenden Puncte in die Scheitelpuncte desselben gehen; es ist dieser Punct zu suchen.

Auflösung. Man theile die gegebene Fläche nach Rk. 296.) in die verlangten verhältnißmäßigen Theile, und bestimme sodann

Fig. aus jeder der bekannten Seiten als Grundlinie und der gefundenen Fläche die zugehörige Höhe eines Dreyeckes (§. 135.), ziehe zu jeder Seite des gegebenen Dreyeckes in der Entfernung der zugehörigen Höhe nach §. 43. 2) eine Parallele; so wird der gemeinschaftliche Durchschnittspunct dieser drey Parallelen, der gesuchte Theilungspunct seyn.

a) Diese Aufgabe findet in der Ausübung vielfältige Anwendung. Meines Wissens ist die Lösung derselben immer nur auf regelmäßige Dreyecke, die in der Praktik selten (fast nie) vorkommen, gegeben. Hierbey darf man nur Eine Seite nach den gegebenen Verhältnissen in drey Theile theilen (§. 84. 4.) und durch jeden Punct zu der anliegenden Seite eine Parallele ziehen, um den gesuchten Theilungspunct zu erhalten (§. 143. 1.).

88. 15. Aufgabe. Ein Trapez *ABCD* in drey solche Theile zu theilen, die sich verhalten wie $\frac{2}{3}:1:2$, und deren Theilungslinien auf die zwey gleichlaufenden des Trapez stoßen, und also wieder Trapeze einschließen.

Auflösung. Man drücke die gegebenen Verhältnisse, ohne Veränderung ihres Werthes, in ganzen Zahlen $2:3:6$ aus (Rk. 253. 2), sodann theile man jede der zwey parallelen Seiten *AB* und *CD* vermög §. 85. 4.) nach den gegebenen Verhältnissen in den Puncten *E*, *H*, *F* und *G*, verbinde *E* mit *F* und *G* mit *H*, so ist das Trapez in die verlangten Theile getheilt.

Denn es ist das Trapez $AFED = \frac{AF + DE}{2} . CI$

und „ „ $FGHE = \frac{FG + EH}{2} . CI$

daher $AFED : FGHE = \frac{AF + DE}{2} . CI : \frac{FG + EH}{2} . CI$ (Rk. 72. I.)

oder $AFED : FGHE = (AF + DE) : (FG + EH)$ Rk. 268. V. u. VI.

Es verhält sich auch $AF : FG = 2 : 3$ und $DE : EH = 2 : 3$ } vermög Construction,

daher $(AF + DE) : (FG + EH) = 2 : 3$ (Rk. 271.)

und $AFED : FGHE = (AF + DE) : (FG + EH)$, verm. Vorig.

folglich $AFED : FGHE = 2 : 3$, u. s. w.

Nun erhellet die gleiche Theilung eines Trapez, so wie auch die gleiche und verhältnißmäßige Theilung eines Parallelogramm von selbst.

Das noch nöthige, und die Anwendung von der Zertheilung der Figuren wird im praktischen Theile an seinem Orte vorkommen.

Fig.

Dritter Abschnitt.

Von den nothwendigsten Eigenschaften, welche sowohl aus der Lage und Stellung der geraden Linien mit Ebenen, als auch aus der Lage und Stellung der Ebenen selbst abgeleitet werden können.

§. 155.

Was man unter einer Ebene versteht, ist bereits §. 10. erklärt worden. Hier sollen nun auch einige Eigenschaften, die aus der verschiedenen Lage und Stellung der Ebenen entspringen, untersucht werden. Bey dieser Untersuchung wird angenommen, daß man jede Ebene nach allen Seiten in Gedanken so weit ausdehnen könne, als man es nur immer verlangt, oder für nöthig erachtet.

I. Einige Eigenschaften der Ebenen mit geraden Linien.

§. 156.

1) Wenn von einer geraden Linie *AB* ein Theil derselben *mn* auf einer Ebene *PQ* liegt oder zwey Puncte *m* und *n* mit der Ebene gemein hat, so müssen auch alle übrigen Theile dieser Geraden auf der nämlichen Ebene liegen; das heißt, es muß die Gerade *AB* selbst nach ihrer ganzen Länge in der Ebene liegen. 89.

Dieses ist ein einfacher Satz, dessen Richtigkeit aus dem Begriff der geraden Linie und der Ebene selbst erhellet. (§. 6 und 10.)

Es würde nämlich *PQ* keine Ebene, oder *AB* keine Gerade seyn, wenn ein Theil derselben über oder unter der Ebene läge, während ein anderer Theil der Geraden in der Ebene liegt. Es ist also unmöglich, daß ein Theil einer Geraden außerhalb einer Ebene falle, wenn sie zwey Puncte *m* und *n* mit der Ebene gemein hat, sondern sie muß, da alle Theile einer Geraden, so wie alle Theile einer Ebene, einerley Richtung haben (§. 6. und 10.), nach ihrer ganzen Länge *AB* in der Ebene *PQ* liegen.

2) Ein Dreyeck *ADC* muß ganz auf der Ebene *PQ* liegen, wenn nur ein Theil von der Fläche desselben (z. B. *ADrm*, oder *mrn*, oder *nrC*) auf der Ebene *PQ* liegt.

Fig. 89. Denn liegt z. B. der Theil mnr auf der Ebene PQ, so hat die Seite AC zwey Puncte m und n mit der Ebene PQ gemein, also liegt sie nach ihrer ganzen Länge, mithin auch die Puncte A und C in der Ebene PQ. Die Seite DC hat die zwey Puncte r und C mit der Ebene PQ gemein, daher liegt sie nach ihrer ganzen Länge; folglich auch der Punct D in der Ebene PQ.

Endlich hat die Seite AD die zwey Puncte A und D mit der Ebene PQ gemein, daher liegt auch die dritte Seite AD nach ihrer ganzen Länge in der Ebene PQ. Da nun alle drey Seiten als die Grenzen des Dreyeckes ADC in der Ebene PQ liegen, wenn ein Theil mrn in der nämlichen Ebene liegt; so liegt auch in dieser Voraussetzung das Dreyeck selbst in derselben Ebene. Auf eben diese Art kann man erweisen, daß das ganze Dreyeck auf der Ebene PQ liegen müsse, wenn ein anderer Theil desselben, z. B. nrC auf dieser Ebene liegt.

§. 157.

90. Durch drey Puncte, die nicht in gerader Linie liegen, wird die Richtung oder die Lage einer Ebene vollkommen bestimmt, und durch solche drey Puncte kann nur eine einzige Ebene gelegt werden.

Denn man denke sich das Ende AB einer Ebene $ABED$ auf zwey unbewegliche Puncte A und B gelegt, so kann diese Ebene um die zwey unbeweglichen Puncte herum gedreht gedacht werden, und verschiedene Lagen erhalten; kommt aber ein dritter unbeweglicher Punct C hinzu, auf welchem die Ebene $ABED$ ruht, so kann man sich durch B und C eine gerade Linie denken, welche nach ihrer ganzen Länge in dieser Ebene liegen muß, weil sie die Puncte C und B mit ihr gemein hat. (§. 156. 1.)

Aus eben diesem Grunde liegt auch AC nach ihrer ganzen Länge in der nämlichen Ebene. Da nun die Lage von einem Theile BCA der Ebene $ADEB$ durch die unbeweglichen drey Puncte A, B und C bestimmt ist, so muß auch die ganze Ebene $ABED$ dieselbe Richtung und Lage haben (§. 10); und da eine Fläche keine Dicke hat, so kann durch jene drey Puncte auch nur eine einzige Ebene gelegt werden, weil alle ebenen Flächen, die man durch diese Puncte noch legen wollte, über einander fallen, und nur eine einzige Fläche ausmachen würden. (§. 2.)

Durch drey Puncte hingegen, die in gerader Linie liegen, das ist, durch eine einzige gerade Linie kann man sich unzählig viele Ebenen gelegt denken.

Fig.

§. 158.

Durch zwey gerade Linien *AB* und *DE*, die sich durchschneiden, kann nur eine einzige Ebene gelegt werden. 89.

Denn man verbinde die Puncte *A* und *D*, so ist durch die drey Puncte *A*, *D* und *C* die Richtung einer jeden durch selbe gelegte Ebene *PQ* bestimmt (§. 157.). Nun haben die Geraden *AB* und *DE* jede zwey Puncte *A* und *C*, so wie *D* und *C* mit dieser Ebene gemein, also liegt jede derselben nach ihrer ganzen Länge in der Ebene (§. 156. 1); folglich liegen zwey sich durchschneidende gerade Linien immer in Einer Ebene.

§. 159.

Wenn eine gerade Linie *HM* eine Ebene *PQ* dergestalt schneidet, daß sie auf allen Geraden, die in was immer für einer Richtung in der Ebene durch den Durchschnittspunct *C* können gezogen werden, senkrecht steht; so sagt man, *HM* stehe senkrecht auf der Ebene *PQ*. 91.

§. 160.

Ist eine Gerade *HC* auf zwey Geraden *AC* und *DC* in ihrem Durchschnittspunct *C* zugleich senkrecht, so steht sie auch senkrecht auf jeder Geraden z. B. auf *FG*, die in der nämlichen Ebene *PQ* nach was immer für einer Richtung durch den Durchschnittspunct *C* gezogen wird; das heißt, sie steht senkrecht auf der Ebene *PQ* selbst.

Man verlängere *AC* und *DC*, mache $AC = CB$ und $CD = CE$, ziehe die Geraden *AE*, *EB*, *BD* und *AD*, so ist $FC = CG$, weil *FG* durch den gemeinschaftlichen Durchschnittspunct der zwey Diagonalen des Parallelogramm *AEBD* gezogen ist (§. 70.), und es decken sich die Dreyecke *FCE* und *DCG* vermög §. 23. 1.), folglich ist die Seite $FE = DG$.

Nun ziehe man auch die Geraden *HB*, *HE*, *HF*, *HA*, *HD* und *HG*, so ist in den zwey Dreyecken *AHE* und *DHB* die Seite $AE = DB$, $HE = HD$, und $HA = HB$, vermög §. 27; folglich decken sich diese Dreyecke, und es ist der Winkel $AEH = BDH$ oder der Winkel $FEH = GDH$ (§. 23. 3.).

Ferner ist in den Dreyecken *FEH* und *GDH*, die Seite

Fig. 91. $FE = GD$, $HE = HD$, und der eingeschlossene Winkel $FEH = GDH$; es sind also diese zwey Dreyecke einander deckend, folglich ist $FH = HG$. Endlich sind in den zwey Dreyecken CFH und CGH alle drey Seiten einander wechselweise gleich, weil CH beyden Dreyecken gemein ist, mithin decken sich diese Dreyecke, und es ist der Winkel $FCH = GCH = 90°$, weil sie zwey gleiche Nebenwinkel sind; folglich steht HC in dem Puncte C senkrecht auf FG. Da sich nun dieses von einer jeden andern Geraden erweisen läßt, die in der Ebene PQ durch den Punct C nach was immer für einer Richtung gezogen wird, so ist HC auf einer jeden solchen Geraden; und folglich auf der Ebene PQ selbst senkrecht.

Hieraus folgt noch:

1) Daß man aus einem außer der Ebene PQ angenommenen Puncte H nur eine einzige Senkrechte HC auf diese Ebene führen kann.

Denn wollte man noch eine andere Senkrechte, z. B. GH auf die Ebene PQ führen; so würde das Dreyeck CGH zwey rechte Winkel enthalten, welches aber unmöglich ist (§. 53. 1.).

89. 2) Daß auch aus einem in der Ebene PQ angenommenen Punct C nur eine einzige Senkrechte CF auf diese Ebene errichtet werden kann.

Denn es sey FC in dem Puncte C senkrecht auf der Ebene PQ, so ist der Winkel $FCB = 90°$. Nun denke man sich durch die drey Puncte F, C und B eine Ebene CH gelegt, und in dieser Ebene (wenn es möglich ist) eine andere Gerade GC in dem nämlichen Puncte C senkrecht auf die Ebene PQ; so müßte auch der Winkel $GCB = 90°$ seyn.

Es wäre demnach der Winkel $GCB = FCB$;

nun aber ist $FCG + GCB = FCB$ (Rk. 40. I.);

daher $FCG = 0$ (Rk. 54. I.).

Da nun der Winkel $FCG =$ Null ist, so muß die Gerade GC mit FC übereinfallen, und mit dieser nur eine einzige Gerade ausmachen; folglich ist aus dem Puncte C nur die einzige Senkrechte FC auf die Ebene PQ möglich.

91. 3) Daß die Senkrechte HC aus allen Geraden HG, HB, HE, u. s. w. die kürzeste ist, die aus dem Puncte H auf die Ebene PQ gezogen werden können, und daß sie folglich die Entfernung des Punctes H von der Ebene PQ bestimmt.

Denn die Dreyecke HCG, HCB, ... sind alle rechtwinkelig, in welchen HC eine gemeinschaftliche Kathete ist, folglich ist sie kürzer als jede der Hypothenusen HG, HB, HE, u. s. w. vermög (§. 89.). Fig. 91.

§. 161.

1. **Aufgabe.** Aus einem außer einer Ebene PQ gegebenen Puncte A (z. B. in der Ausübung, aus einem in der Decke eines Zimmers gegebenen Puncte, auf den Fußboden desselben) eine Senkrechte AM auf diese Ebene zu fällen. 92.

Auflösung. Man befestige in dem gegebenen Puncte A eine Schnur, oder besser einen gut ausgespannten Eisendraht, sodann beschreibe man mit einer nämlichen Länge und gleichförmigen Anspannung der Schnur oder des Drahtes auf der Ebene PQ einen Kreisbogen BCD, nehme in diesem drey Puncte D, C und B an, suche zu denselben nach §. 40. 1) den Mittelpunct M, und verbinde endlich diesen mit dem gegebenen Puncte A; so ist die Verbindungslinie AM in dem Puncte M senkrecht auf der Ebene PQ.

Denn es ist in den Dreyecken BAM, DAM und CAM die Seite AM gemein, AB, AC und AD sind wegen der gleichförmigen Anspannung der Schnur einander gleich, sodann sind BM, CM und DM Halbmesser eines Kreises; es sind also in diesen Dreyecken alle drey Seiten einander wechselweise gleich, daher ist das Dreyeck $BAM = CAM = DAM$, und der Winkel $AMB = AMC = AMD = 90°$; folglich stehet AM in dem Puncte M senkrecht auf der Ebene PQ.

a) Am kürzesten verfährt man wohl bey dieser Aufgabe, wenn man an dem gegebenen Puncte A eine Schnur frey hangen läßt, welche mit einem schweren Gewichte versehen ist, und so bey ruhendem Gewichte den Punct M auf der Ebene PQ bestimmt.

2. **Aufgabe.** Aus einem in einer Ebene PQ gegebenen Puncte M eine Senkrechte auf diese Ebene zu errichten.

Auflösung. Man prüfe zuerst (nach §. 31. a) zwey Winkelhaken, oder hölzerne rechtwinkelige Dreyecke, und lege beyde an den gegebenen Punct M, das eine z. B. in der Lage BAM, das andere aber etwa in der Lage CAM, so wird die Gerade MA (die man in der Ausübung nach Erforderniß etwa durch einen feinen steifen Eisendraht vorstellen kann) auf der ganzen Ebene PQ senkrecht stehen (§. 160.).

b) Bey Bestimmung einer Mittagslinie für einen Ort findet diese Aufgabe vortheilhafte Anwendung. Siehe m. prakt. Geometr. S. 288.

II. Einige Eigenschaften der Ebenen unter sich.

§. 162.

Fig. 93. Der gemeinschaftliche Durchschnitt zweyer Ebenen *PQ* und *RS* ist eine gerade Linie *AB*.

Denn der gemeinschaftliche Durchschnitt zweyer Ebenen muß einmahl eine Linie seyn, weil sie selbst keine Dicke haben, also hat ihr Durchschnitt keine andere Ausdehnung, als die Länge. Nun aber liegen die Endpuncte *A* und *B* dieses Durchschnittes sowohl in der einen als auch in der andern Ebene, das ist: der gemeinschaftliche Durchschnitt *AB* hat sowohl mit der Ebene *PQ*, als auch mit der Ebene *RS* zwey Puncte *A* und *B* gemein; es liegt also derselbe nach seiner ganzen Länge in beyden Ebenen zugleich; folglich ist der Durchschnitt zweyer Ebenen eine gerade Linie.

§. 163.

Wenn man aus was immer für einem Punct *C* der Durchschnittslinie *AB* zweyer Ebenen *PQ* und *RS* zwey Senkrechte *CD* und *CE* auf *AB*, die erste in der Ebene *RS*, und die andere in der Ebene *PQ* errichtet; so heißt der Winkel *DCE* der Neigungswinkel der zwey Ebenen *PQ* und *RS*, und wird zum Unterschiede der übrigen von geraden Linien begrenzten Winkel, auch Flächenwinkel genennt. Ist nun dieser Neigungswinkel ein rechter, nämlich = 90°; so stehen die zwey Ebenen senkrecht auf einander.

§. 164.

94. Wenn zwey Ebenen *PQ* und *RS* überall gleich weit von einander entfernt sind, das ist, wenn die Senkrechten, die man aus was immer für einem Puncte der einen Ebene auf die andere ziehen kann, alle einander gleich sind; so sind diese Ebenen gleichlaufend, oder parallel.

Aus dieser Erklärung folgt, daß zwey parallele Ebenen niemahl sich schneiden können, wenn man sie in Gedanken auch noch so weit ausdehnt, weil ihre Entfernung von einander immer unverändert bleibt. Auch ist leicht einzusehen, daß die Wechselwinkel, daß die äußern und innern Winkel auf einer nämlichen Seite einander gleich sind, wenn zwey parallele Ebenen *PQ* und *RS* von einer dritten *AC* geschnitten werden. Desgleichen, daß eine Ebene oder auch eine gerade Linie, wenn sie auf eine von mehrern parallelen Ebenen senkrecht

geführet ist, auch auf allen übrigen parallelen Ebenen senkrecht steht, u. s. w. Fig. 94.

Überhaupt läßt sich alles das, was wir von der Neigung gerader Linien gesagt haben, auch auf die Neigung der Ebenen anwenden. Denn da die Grenzen einer ebenen Fläche gerade Linien sind, und die ganze Ebene die nämliche Lage hat, welche diese Geraden haben; so folgt, daß die Eigenschaften der geraden Linien in Hinsicht der Neigung gegen einander, auch den ebenen Flächen zukommen.

§. 165.

Wenn zwey parallele Ebenen *PQ* und *RS* von einer dritten *ABCD* geschnitten werden, so laufen die Durchschnittslinien *DC* und *AB* mit einander parallel.

Denn die Durchschnittslinie *DC* liegt nach ihrer ganzen Länge in der Ebene *RS*, und die Durchschnittslinie *AB* in der Ebene *PQ*; diese zwey Ebenen sind aber vermöge der Voraussetzung mit einander gleichlaufend; folglich ist auch die Durchschnittslinie *DC* parallel mit *AB*.

§. 166.

Wenn man die Scheitelpuncte *A*, *B*, *C*, *D* und *E* eines auf einer Ebene *PQ* gegebenen Vieleckes *ABCDE* mit einem außer dieser Ebene gelegenem Puncte *M* durch gerade Linien *MA*, *MB*, *MC*, *MD* und *ME* verbindet, und sodann durch einen beliebigen Punct dieser Verbindungslinien eine Ebene *RS* parallel zu der Ebene *PQ* führt; so werden die Verbindungslinien in den Puncten *a*, *b*, *c*, *d* und *e* geschnitten, und es können daraus folgende sehr brauchbare Sätze abgeleitet werden. 95.

1) Die Abschnitte dieser gezogenen Geraden stehen sowohl unter einander, als auch mit den ganzen Linien in Proportion.

Denn man denke sich durch die drey Puncte *A*, *B* und *M* eine Ebene *MAB* gelegt, so laufen die Durchschnittslinien *ab* und *AB* mit einander parallel (§. 165.); folglich sind die zwey Dreyecke *Mab*, und *MAB* ähnlich (§. 65. 1.),

und es verhält sich $Ma : Mb = MA : MB$
oder $Ma : Mb = aA : bB$ } §. 79.

uud auch $Ma : ab = MA : AB$ (§. 77.),

u. s. w.

Eben so läßt sich erweisen, daß $Mb : Mc = MB : MC$

Fig. 95.

oder $Mb : bc = MB : BC$

u. s. w.

Statt findet, wenn man durch die drey Puncte B, C und M eine Ebene MBC gelegt denket.

2) Die zwey Vielecke $ABCDE$ und $abcde$ sind einander ähnlich.

Denn man denke sich durch die Puncte A, C und M die Ebene MAC und durch die Puncte A, D und M die Ebene MAD; so verhält sich

$Ma : ab = MA : AB$, oder $Ma : MA = ab : AB$,
und $Ma : ac = MA : AC$, oder $Ma : MA = ac : AC$,

daher auch $ac : AC = ab : AB$.

Ferner verhält sich $Mb : bc = MB : BC$, oder $Mb : MB = bc : BC$;
und $Mb : ab = MB : AB$, oder $Mb : MB = ab : AB$;

also auch $ab : AB = bc : BC$;

es stehen also, wegen der vollkommen gleichen Verhältnisse $ac : AC = ab : AB = bc : BC$ die Seiten der Dreyecke abc und ABC in Proportion; folglich sind sie einander ähnlich (§ 78.). Da sich auf eben diese Art erweisen läßt, daß auch alle übrigen Dreyecke acd und ACD so wie ade und ADE ähnlich sind; so sind vermöge §. 107. die Vielecke $abcde$ und $ABCDE$ selbst ähnlich.

3) Wenn man aus dem Puncte M eine Senkrechte MN auf die zwey parallelen Ebenen PQ und RS zieht, so haben die Flächeninhalte dieser Vielecke eben dasselbe Verhältniß gegen einander, wie die Quadrate ihrer Entfernungen von dem gemeinschaftlichen Punct M der Verbindungslinien AM, BM . . . .

Man verbinde die Durchschnittspuncte n und N der Senkrechten MN mit den nächst liegenden Puncten a und A durch Gerade, so sind die Dreyecke Mna und MNA ähnlich, und es

verhält sich $Mn : Ma = MN : MA$
und $Ma : ab = MA : AB$

also auch $Mn : MN = ab : AB$ (Rk. 270. 1.)
oder $Mn^2 : MN^2 = ab^2 : AB^2$

Da auch $abcde : ABCDE = ab^2 : AB^2$ sich verhält (§. 146.), so ist endlich $abcde : ABCDE = Mn^2 : MN^2$ (Rk. 249.).

4) Aus der erwiesenen Ähnlichkeit der in verschiedenen Ebenen liegenden Dreyecke abc und ABC, acd und ACD u. s. w. folgt nun, daß auch Dreyecke, die in verschiedenen Ebenen liegen, einander ähnlich sind, wenn nur ihre Seiten wechselweise parallel laufen; und da ferner in den ähnlichen Dreyecken z. B. ABC und abc die Seiten AB und ab proportional sind, so sind die gegenüber liegenden Winkel ACB und acb einander gleich (§. 78.); folglich sind auch Winkel, obschon in verschiedenen Ebenen liegend, einander gleich, wenn nur ihre Schenkel parallel laufen. Fig. 95.

a) Im gegenwärtigen Abschnitte kann man der Vorstellungskraft sehr zu Hülfe kommen, wenn man sich die Figuren wirklich verfertiget; indem man die ebenen Flächen vermittelst steifen Papier und Pappendeckel, die geraden Linien theils durch dünnen Eisendraht, theils durch gespannte Fäden von Seide ꝛc. vorstellet. So z. B. kann man in der Fig. 91. die Ebene PQ vermittelst Pappendeckel, die Gerade HC durch Eisendraht, die Geraden HA, HF, HB . . . durch gespannte Fäden, und die Geraden AE, EB, BD u. s. w. mit gezogenen Tuschlinien auf dem Pappendeckel vorstellen. Solche Modelle kann sich ein Jeder nach der Zeichnuug leicht verfertigen, und erleichtern dem Anfänger das Studium dieses Abschnittes sehr wesentlich.

§. 167.

Die Lösung der folgenden Aufgaben wird den Anfängern zum eigenen Nachdenken und zur Übung überlassen.

1) Auf einer Waldfläche $a = 1600\ q^o$ stehen 40 Samenbäume einer gewissen Holzart; da bekanntlich unter ihrer Kronentraufe keine jungen Pflanzen gedeihen, so fragt man, der wie vielte Theil der Fläche wird mit gesunden Pflanzen sich bewachsen, wenn im Durchschnitte der Kronendurchmesser der Bäume 2,8 Klft. beträgt? (nach §. 141. nahe 0,15 des Ganzen).

2) Eine geometrische Vermessung ist nach dem Verhältnisse $2880 : 1 = \frac{1}{2880}$ der Umfangsseiten bewirkt; wie verhält sich die Karte (verzeichnete Figur auf dem Papier) zur wirklichen Fläche in der Natur? (nach §. 146. wie 1 : 8294400).

3) Auf einem Gebäude ist eine gewisse Fläche von 40 Klafter lang neu zu bedachen; der senkrechte Querdurchschnitt des Daches hat zur Breite 10 und zur Höhe 4 Klft. Auf 1 q^o sind 250 Schindel von 15″ lang und 3″ breit erforderlich, wenn das Tausend Schindel 4 fl. 30 kr. und eben so viel Nägel 45 kr. kosten, so fragt es sich um den ganzen Kostenbetrag? (nach §. 87. und 123. zusammen 336 fl.)

Fig. 95. 4) Der Halbmesser h eines Kreises ist gleich der Höhe eines Trapezes, der Durchmesser desselben aber der kleinern parallelen Seiten A gleich, welche $m = 560$ Einheiten beträgt; es ist die größere parallele Seite B des Trapezes zu bestimmen, welches mit dem Kreise gleiche Fläche einschließt? (nach §. 137. und 141. dann Nk. 226. wird $B = 1198{,}4$).

5) Zu einem ökonomischen Gebrauche ist eine Fläche von 3½ Joch in Form eines Rechteckes auszustecken, wobey sich die große Seite zur kleinern verhält wie 3 : 2; wie groß muß jede Seite seyn? (nach §. 137. und 141. wird die größere Seite $= 91{,}6^{\circ}$ und die kleinere $= 61{,}1^{\circ}$).

6) Wie viel Pflanzstämme bedarf man auf 1 Joch $= 1600\ q^{\circ}$, wenn selbe $3'$ entfernt in der gleichseitigen Dreyeckform gesetzt werden sollen? (nach §. 97. a) und 87. ist die Anzahl Pflanzstämme $= 7390$).

7) Ein Dreyeck in drey gleiche Theile so zu theilen, daß die Theilungslinien aus Einem Puncte im Dreyecke in die Scheitel desselben laufen. (Durch Halbirung zweyer Seiten, und vermög §. 133. 3) und Nk. 54. I).

8) Aus dem bekannten Flächeninhalt eines Dreyeckes $= f = 3846\ q^{\circ}$ soll der Halbmesser eines Kreises gefunden werden, dessen Inhalt nur den 4ten Theil der vorigen Fläche enthält (nach §. 141. und Nk. 237. II. unter 4) ist der Halbmesser $= 64^{\circ}$).

Drittes Hauptstück.

Von den Eigenschaften der geometrischen Körper.

Erster Abschnitt.

Allgemeine Begriffe von den geometrischen Körpern.

§. 168.

Diejenige Fläche, worauf ein Körper ruht, heißt seine Grundfläche (Basis), wie $ABCDE$ (Fig. 96); die obere, der Grundfläche entgegengesetzte Fläche $abcde$ (welche öfters auch die obere Grundfläche genennt wird) oder die Spitze M (Fig. 95.), oder die Schneide EF (Fig. 126.) heißt der Scheitel des Körpers. Eine Gerade MN (Fig. 95.), oder mM (Fig. 98.), welche man von einem Puncte des Scheitels auf die Grundfläche oder deren Verlängerung senkrecht fällt, wird die Höhe des Körpers genennt. Fig. 96.

Die äußerste Grenze oder der ganze äußere Umfang eines Körpers heißt seine Oberfläche. Die Größe der Ausdehnung aber, welche von der ganzen Oberfläche des Körpers eingeschlossen ist, wird der körperliche Inhalt, Körperraum, Kubikinhalt (Volumen) desselben genennt. Der Durchschnitt (Profil) eines Körpers endlich, ist eine Fläche, die durch den Körper geht, und ihn in zwey Theile schneidet; dieser Durchschnitt muß ein Vieleck von eben so vielen Seiten seyn, als Flächen von der Oberfläche des Körpers mittelst der Durchschnittsfläche geschnitten werden.

a) Der Kubikinhalt wird hier für die Größe der Ausdehnung des Körpers genommen, ohne Rücksicht auf die Materie oder Masse (Massa), welche in der Oberfläche desselben eingeschlossen ist. Daher kann von zwey vollkommen gleich großen Körpern der eine mehr Masse enthalten als der andere. Denn die Masse ist die Anzahl der Theile, die von der Oberfläche eines Körpers eingeschlossen ist: liegen nun diese

Theile in einem Körper näher an einander, als in einem andern gleich
Fig. großen Körper: so hat jener gewiß eine größere Masse als dieser
96. eben so große Körper.

b) Daher hat z. B. von zwey aufgesetzten Klaftern Holz von einerley Gattung, diejenige mehr Holzmasse, bey welcher die Scheiter näher an einander gelegt, das ist, in welcher weniger leere Zwischenräume sind, als die andere. (Hier pflegt man zu sagen: jene hat mehr soliden Inhalt, als diese.) Eben so hat ein Stück Tannenholz weniger Holzmasse, als ein ganz gleich großes Stück Eichenholz; weil in diesem die Holztheilchen vermöge ihrer natürlichen Structur näher beysammen liegen, als in jenem. Man sagt daher, das Eichenholz ist dichter als Tannenholz, u. s. w.

c) Den Kubikinhalt, oder die Größe der Ausdehnung eines Körpers bestimmt man durch die Geometrie; die Masse desselben aber wird vermittelst Gewichte in der Mechanik untersucht.

§. 169.

1) Ein Körper *ADEead*, welcher von zwey vollkommen gleichen und parallelen Vielecken *ADE* und *ade*, und von eben so viel Parallelogrammen eingeschlossen ist, als jedes der zwey Vielecke Seiten hat, heißt ein Prisma (Ecksäule); die zwey vollkommen gleichen und parallelen Vielecke *ADE* und *ade* werden die Grundflächen, jene die untere, diese aber, die obere Grundfläche genennt. Ihre Entfernung, das ist: die Senkrechte, welche von was immer für einem Puncte der einen Grundfläche auf die Ebene der andern Grundfläche (die man im erforderlichen Falle auch verlängern kann) gezogen wird, heißt die Höhe des Prisma. Ein Prisma, dessen alle Seitenflächen auf den Grundflächen senkrecht stehen, wird ein senkrechtes genennt (Fig. 96.); stehen hingegen die Seitenflächen auf den Grundflächen nicht senkrecht, so heißt es ein schiefes Prisma (Fig. 97). Ein Prisma heißt dreyseitig, vierseitig, fünf-
97. seitig u. s. w., wenn die Grundflächen desselben, Dreyecke, Vierecke oder Fünfecke . . . sind.

2) Ein vierseitiges Prisma, dessen Grund- und Seitenflächen Parallelogramme sind, und welches demnach von sechs Parallelogrammen eingeschlossen ist, wird insbesondere ein Parallelepiped genennt. Ein senkrechtes Parallelepiped, dessen Grund- und Seitenflächen einander vollkommen gleich, und folglich Quadrate sind, heißt
108. ein Kubus (Würfel).

3) Ein Prisma, dessen Grundflächen Kreise sind, wird ein Zylinder (Rundsäule, Walze), und die gerade Linie, welche die

Mittelpuncte der zwey Kreise verbindet, wird die Achse des Zylinders genennt. Ein Zylinder heißt senkrecht, wenn die Achse desselben auf den Grundflächen senkrecht (Fig. 98.), schief aber, wenn die Achse desselben auf den Grundflächen schief steht (Fig. 99.). Bey einem senkrechten Zylinder ist die Achse *mM* zugleich die Höhe oder Länge desselben; bey einem schiefen aber wird diejenige Senkrechte *mB* die Höhe genennt, welche vom Mittelpuncte des Scheitels auf die Grundfläche oder deren Verlängerung gefällt wird. Fig. 98. 99.

4) Ein Cylinder heißt gleichseitig, wenn sein Durchmesser der Höhe gleich ist.

§. 170.

Wenn man von einem Prisma ein Stück dergestalt abschneidet, daß die Durchschnittsebene *ghiklmg* mit der Grundfläche einen Winkel bildet, daher jene mit dieser nicht parallel läuft; so heißt der Überrest *ABgk* ein schief abgeschnittenes Prisma (Fig. 96.). Eben so heißt das Stück *ABbf* ein schief abgeschnittener Zylinder (Fig. 98.). Wird ein Zylinder zwar schief, aber an beyden Enden parallel abgeschnitten, so wird er ein parallel schief abgeschnittener Zylinder genennt (Fig. 99.). 96.

§. 171.

Da der Raum, den eine Fläche beschreibt, wenn sie sich anders als nach ihrer Lage bewegt, drey Ausdehnungen hat, und folglich ein Körper ist (§. 4. 3); so kann man sich vorstellen, daß ein Prisma *BDEefC* entsteht, wenn sich ein Vieleck *ABCDEF* mit einem Puncte *A* längs einer Geraden *Aa* immer parallel fortbewegt, bis es in *abcdef* anlanget; und daß ein Zylinder entsteht, wenn eine Kreisfläche *AdBc* mit ihrem Mittelpuncte *M* längs einer Geraden *Mm* bis *m* sich immer parallel fortbewegt. Ein senkrechter Zylinder entstehet auch, wenn sich ein Rechteck *AamM* um eine Seite *Mm*, wie um eine unbewegliche Achse herumdreht, bis es wieder in die vorige Lage zurückkommt. Daher ist jeder Durchschnitt *fg*, der senkrecht auf die Achse *Mm* geschieht, ein Kreis, weil jeder Punct *A*, *f*, *a*.... der Geraden *Aa* während seiner Bewegung um die Achse einen Kreis beschreibt, die alle einander gleich sind (§. 11.). 98.

§. 172.

1) Eine Pyramide (Spitzsäule) *ABCDE* ist ein Körper, der von einer ebenen Grundfläche, und von so viel Dreyecken einge- 100.

Fig. 100. schlossen ist, als die Grundfläche Seiten hat. Die senkrechte Entfernung *ME* der gemeinschaftlichen Spitze aller einschließenden Dreyecke von der Ebene der Grundfläche heißt die Höhe der Pyramide. Pyramiden heißen dreyseitig, vierseitig, fünfseitig u. s. w., wenn ihre Grundflächen Dreyecke, Vierecke, Fünfecke sind. Regelmäßige oder gleichseitige Pyramiden sind solche, deren Grundflächen regelmäßige Vielecke, und die einschließenden Dreyecke alle einander gleich und concurrent sind.

101. 2) Eine Pyramide *ABcd* (Fig. 101.) wird abgekürzt genennt, wenn ihre Spitze mit einer zu der Grundfläche parallelen Ebene abgeschnitten ist.

102. 3) Eine Pyramide *ABC*, deren Grundfläche ein regelmäßiges Vieleck von unendlich kleinen Seiten, nämlich ein Kreis ist, wird ein Kegel (Conus) genennt. Die Gerade *MC*, welche den Mittelpunct der Grundfläche mit der Spitze verbindet, heißt die Achse, und jede Gerade *CA*, *CD* u. s. w., die von der Spitze an den Umkreis der Grundfläche gezogen wird, heißt die Seite des Kegels. Ein Kegel heißt senkrecht, wenn seine Achse auf der Grundfläche senkrecht steht. Bey einem senkrechten Kegel ist die Achse *CM* zugleich die Höhe; bey einem schiefen aber wird diejenige Gerade die Höhe genennt, welche von der Spitze senkrecht auf die Grundfläche, oder deren Verlängerung gefällt wird.

4) Ein Kegel heißt gleichseitig, wenn der Durchmesser seiner Grundfläche der Seite desselben gleich ist. Ein Kegel wie *ABba*

103. Fig. 103. heißt abgekürzt, wenn die Kreisfläche *ab* mit der Grundfläche *AB* parallel ist.

§. 713.

95. 1) Man kann sich die Entstehungsart einer Pyramide vorstellen, wenn ein Vieleck *ABCDE* mit einem Puncte *A* längs einer geraden Linie *AM* sich bis *M* vollkommen parallel fortbewegt, und seine Seiten während dieser Bewegung immer gleichförmig, das ist: nach eben dem Verhältnisse abnehmen, wie die Entfernungen des Punctes *A* von der Spitze *M*; wenn nämlich der Punct *A* in *a* angelangt ist, und von da bis *M* noch die Hälfte von *AM* zurückzulegen hat, daß auch jede Gerade *ab*, *bc*, *cd* .... die Hälfte von ihrer gleichliegenden *AB*, *BC*, *CD* .... sey, daß sich also verhält $AB : ab = 2 : 1$; und daß endlich, wenn der Punct *A* in *M* angelangt seyn wird, auch alle Seiten des beweglichen Vieleckes in Null, oder in den Punct *M* übergegangen sind. Nehmen hingegen die Seiten der

bewegten Grundfläche nicht gleichförmig, sondern nach einem andern Fig.
beliebigen Gesetze ab; so wird der dadurch erzeugte Körper eine **Afterpyramide** genennt.

2) Die Erzeugung eines senkrechten Kegels kann man sich vor- 102.
stellen, wenn sich ein Kreis *ADB* mit seinem Mittelpuncte *M* längs der Achse *MC* immer parallel fortbewegt, und sein Durchmesser während dieser Bewegung eben so abnimmt, wie die Entfernung des Mittelpunctes *M* von dem angenommenen Puncte *C*; daß nämlich sich $AB : ab = MC : mC$ oder $AM : am = MC : mC$ verhält, wenn der Punct *M* in *m* anlanget.

3) Wenn hingegen der Durchmesser der Grundfläche während der Bewegung des Kreises nicht gleichförmig, sondern nach was immer für einem anderen Gesetze abnimmt; so heißt der dadurch erzeugte Körper ein **Afterkegel**.

4) Ein senkrechter Kegel *ABC* entsteht auch dadurch, wenn sich ein rechtwinkeliges Dreyeck *ACM* um eine Kathete *CM*, als um eine unbewegliche Achse herumdreht, bis es wieder in die vorige Lage zurückkommt; daher ist jeder mit der Grundfläche *AB* parallel geführte Durchschnitt *ab* ein Kreis, weil jede auf *MC* geführte Senkrechte *AM*, *am*.... als ein Halbmesser betrachtet werden kann.

5) Ein **parallel abgekürzter senkrechter Kegel** *ABba* entsteht, wenn sich ein rechtwinkeliges Trapez *AMma* um die Senkrechte *Mm* als um eine Achse so herumdreht, bis selbes wieder in die vorige Lage zurückkommt.

§. 174.

Eine **Kugel** (Sphäre) ist ein Körper, der von einer einzigen 104.
krummen Fläche dergestalt eingeschlossen ist, daß alle Puncte dieser krummen Fläche von einem in der Mitte des Körpers gedachten Puncte gleich weit abstehen, welcher daher der **Mittelpunct** der Kugel heißt. Man kann sich vorstellen, daß ein solcher Körper ent-
steht, wenn eine halbe Kreisfläche *ADC* (Fig. 105.) um einen 105.
Durchmesser *DC*, als um eine unbewegliche Achse sich herumdreht; daher beschreibt jeder Punct *A*, *a*..... des halben Umkreises *DAC* während seiner Bewegung einen Kreis, weil jede auf *DC* geführte Senkrechte *AM*, *am*.... als der Halbmesser eines solchen Kreises angesehen werden kann. Die einschließende krumme Fläche heißt die **Kugelfläche**, oder die **Oberfläche** der Kugel. Jede Gerade *MB*, *Mb*.... aus dem Mittelpunct bis an die Kugelfläche gezogen, heißt der **Halbmesser**, die Gerade aber, welche durch

Fig. 105. den Mittelpunct beyder Seits bis an die Oberfläche der Kugel gezogen wird, heißt der Durchmesser der Kugel. Ein Stück *abCa* von einer Kugel durch eine ebene Fläche abgeschnitten, heißt ein Kugelabschnitt. Ein solcher Kugelabschnitt wird auch durch die Umdrehung des halben Kreisabschnittes *amC* um seine Höhe *mC* erzeugt. Ein Körper *aMbCa*, der durch die Umdrehung des Kreisausschnittes *aMC* um den Halbmesser *CM* entsteht, wird ein Kugelausschnitt genennt. Ein Stück *aABb* endlich durch zwey parallele Ebenen aus einer Kugel ausgeschnitten, heißt eine Zone; sie wird erzeugt, wenn sich das trapezförmige Stück *AMma* zwischen zwey parallelen Ordinaten *am* und *AM* eines Halbkreises um den Durchmesser *DC* herumdreht.

§. 175.

104. und 105. Wenn eine Kugel durch eine ebene Fläche geschnitten wird, so ist der Schnitt jedes Mahl ein Kreis.

Denn vermöge des Vorhergehenden ist jeder Punct der Oberfläche vom Mittelpuncte der Kugel gleich weit entfernt, daher läßt sich die Erzeugungsfläche derselben nach jeder Richtung in der Kugel denken, und weil von der Erzeugungsfläche jeder Punct des Halbkreises bey seiner Bewegung einen Kreis beschreibt; so muß folglich auch jeder Schnitt, der mittelst einer Ebene in der Kugel geschieht, ein Kreis seyn.

Es erhellet von selbst, daß die Kugelschnitte, welche von dem Mittelpuncte einer und derselben Kugel gleich weit abstehen, einander gleich; daß jene kleiner, welche weiter von dem Mittelpuncte, jene aber größer sind, welche näher an demselben liegen, und daß endlich derjenige Kugelschnitt am größten ist, der durch den Mittelpunct der Kugel selbst geführt wird.

§. 176.

104. Alle Kugelschnitte *ADBC* und *AeBf*, welche durch den Mittelpunct einer Kugel geführt sind, heißen größte Kreise, und sind einander gleich, weil sie gleiche Halbmesser haben. Jede zwey größte Kreise auf einer nämlichen Kugel, welche sich durchschneiden, theilen einander, sowohl in Hinsicht auf ihre Flächen als auch in Hinsicht auf ihre Umkreise, in zwey vollkommen gleiche Theile, weil ihre gemeinschaftliche Durchschnitts- oder Theilungslinie durch den Mittelpunct beyder Kreise gehet (§. 13. 5.).

§. 177.

1) Körper können auf zweyerley Art einander gleich seyn; Fig.
a) in Hinsicht auf gleiche äußere Form, und b) in Hinsicht auf Gleichheit ihrer körperlichen Räume. Im ersten Falle müssen die Körper von einerley Gattung, d. h. entweder Zylinder, oder Kugeln, oder Kegel u. s. w., im zweyten Falle aber können sie von verschiedener Gattung seyn. Im ersten Falle a) decken sich die gleichnamigen äußern Abmessungen der Körper, wenn sie wechselweise gehörig über einander gelegt, oder über einander liegend, und dabey die krummen Abmessungen in gerade ausgespannt gedacht werden. Im zweyten Falle b) sind Körper von verschiedener Gattung einander gleich, wenn ihre Kubikräume, ohne Rücksicht auf gleiche äußere Form, einander gleich sind. Solche Körper werden wir der Kürze wegen gleichhaltig nennen. Davon weiter unten.

2) Körper von einerley Art sind einander ähnlich, wenn ihre gleichnamigen Abmessungen wechselweise in Proportion stehen, d. h. wenn sich die Grundfläche des einen Körpers zur Grundfläche des andern, wie die Höhe des erstern, zur Höhe des andern Körpers verhält, u. s. w.

§. 178.

Wenn sich (wenigstens) drey oder mehre Flächen gegen einander neigen, und mit ihren Spitzen in Einem Puncte sich schließen, so entsteht ein Körperwinkel. So z. B. ist jede Ecke in einem Zimmer, an einem Würfel (Fig. 108.), jede Spitze an einer Py- 108.
ramide, ein Körperwinkel. Dieser besteht demnach aus drey oder mehrern ebenen Winkeln, welche alle in eine Spitze zusammenlaufen, und ihre Summe muß weniger als vier rechte Winkel oder weniger als 360° betragen; weil sie in eine nämliche Ebene fallen würden, wenn sie 360 Grade enthielten. Denn wenn man einen aufgerichteten Körperwinkel herabdrücket, daß er in einer nämlichen 106.
Ebene liege, so entsteht eine Öffnung, die dem Winkel x gleich ist; wird auch diese Öffnung mit einem ebenen Winkel ausgefüllt, so hat man 360 Grade (§. 19.); es ist aber unmöglich die Spitze nun aufzurichten, wenn man nicht einen Theil oder einen Winkel aus jenen 360 Graden hinwegnimmt.

§. 179.

Die in §. 169, 172 und 174 genannten, und erklärten Körper heißen Grundkörper; außer diesen gibt es noch regelmä-

Fig. 106. ßige, unregelmäßige und symetrische Körper. Die regelmäßigen und symetrischen Körper lassen sich alle in Grundkörper zertheilen, oder zertheilt andeuten. Auch von den unregelmäßigen lassen sich einige in solche Körper zertheilt vorstellen, daher läßt sich ihre Größe auch genau bestimmen; mehre derselben können aber in keine bekannten Grundkörper zerlegt, daher auch ihre Größe nur näherungsweise berechnet, oder durch andere Hülfsmittel angegeben werden.

Von den in bekannte Grundkörper zerlegbaren unregelmäßigen Körpern werden wir in der Folge die nöthige Anleitung zur Bestimmung ihrer Größe geben; hingegen von allen übrigen Körpern, die für uns kein besonderes Interesse haben, hier nur im Kurzen eine historische Erwähnung machen.

1) Diejenigen Körper werden regelmäßig genennt, welche von gleichen regelmäßigen Vielecken, und von vollkommen gleichen Körperwinkeln eingeschlossen sind. Es gibt deren nur fünf.

107. a) Die dreyeckige gleichseitige Pyramide (Fig. 107.), welche von vier gleichseitigen Dreyecken eingeschlossen ist, wovon drey in der Figur zu sehen sind, das vierte aber die Grundfläche bildet; sie heißt, wegen der vier einschließenden Flächen, Tetraeder. Jeder Körperwinkel an diesem Körper hat $3 . 60° = 180°$.

Da alle Seiten eines regelmäßigen Körpers gleich sind, so ist, wenn S allgemein die Seite eines regelmäßigen Körpers bezeichnet, des Tetraeders Oberfläche $= S^2\sqrt{3}$; und Kubikinhalt $= \frac{1}{12} S^3\sqrt{2}$.

108. b) Der Würfel, Kubus oder Hexaeder ist von sechs gleichen Quadraten eingeschlossen (Fig. 108). Jeder Körperwinkel desselben enthält $3 . 90° = 270°$. Oberfl. $= 6 S^2$. Kubikinh. $= S^3$.

109. c) Das Octaeder (Fig. 109.) ist von acht gleichseitigen Dreyecken eingeschlossen, wovon vier in der Figur zu sehen sind, die andern vier aber, das ist, die andere Hälfte des Körpers auf der entgegengesetzten Seite daran gedacht werden muß; dieser ist demnach das Doppelte einer viereckigen gleichseitigen Pyramide. Jeder Körperwinkel an diesem Körper enthält $4 . 60° = 240°$. Oberfl. $= 2 S^2\sqrt{3}$. Kubikinh. $= \frac{1}{3} S^3\sqrt{2}$.

110. d) Das Dodekaeder (Fig. 110.) ist von zwölf regelmäßigen Fünfecken eingeschlossen, wovon sechs oben zu sehen sind, die andern sechs aber auf der entgegengesetzten Seite liegen, und drey und drey zusammen den Körperwinkel bilden, welcher daher $3 . 108° = 324°$ enthält, weil jeder Vieleckswinkel in einem regelmäßigen Fünfecke $= 108°$ ist. Oberfl. $= 15 S^2 \sqrt{1 + \frac{2}{5}\sqrt{5}}$. Kubikinh. $= \frac{1}{4} S^3 (15 + 7 \sqrt{5})$.

e) Das Ikosaeder (Fig. 111.) ist in zwanzig gleichseitige Fig. 111.
Dreyecke eingeschlossen, wovon fünf und fünf zusammen den Körperwinkel bilden, der daher $5 . 60° = 300°$ enthält. Oberfl. $= 5 S^2 \sqrt{3}$. Kubikinh. $= \frac{5}{12} S^3 (3 + \sqrt{5})$.

Um alle diese fünf regelmäßige, oder sogenannte platonische Körper läßt sich eine Kugel herumschreiben, die durch alle Scheitelpuncte geht; und eine Kugel einschreiben, die jede Seitenfläche in ihrem Mittelpuncte berührt (§. 72. und 74.). Die unter *a*, *b*, *c*, *d* und *e* beygesetzten Ausdrücke können mit Hülfe trigonometrischer Schlüsse abgeleitet werden.

a) Andere regelmäßige Körper gibt es nicht; denn sechs gleichseitige Dreyecke, vier Quadrate, drey regelmäßige Sechsecke, wenn man sie mit ihren Vieleckswinkeln in einem Puncte zusammenfügen wollte, um einen Körperwinkel zu bilden, würden um diesen Punct herum schon 360° enthalten, und folglich in einer nämlichen Ebene liegen. Noch weniger würden mehr als vier Quadrate, oder mehr als drey regelmäßige Sechsecke dazu taugen; weil sie gar nicht zusammen passen, und folglich keinen Körperwinkel einschließen können. Da übrigens drey Vieleckswinkel von andern regelmäßigen Vielecken auch schon über 360° enthalten; so können auch sie keinen Körperwinkel einschließen, folglich auch keinen Körper allenthalben begrenzen.

2) Von den sogenannten archimedischen Körpern gibt es dreyzehn, wovon zehn von zweyerley, drey aber von dreyerley regelmäßigen Vielecken derselben Seite begrenzt werden, um die sich gleichfalls eine Kugel so herumschreiben läßt, daß alle Ecke in der Oberfläche derselben liegen. Es werden nämlich Körper begrenzt:

a) von 4 Dreyecken und 4 Sechsecken,
b) „ 8 Dreyecken „ 6 Achtecken,
c) „ 8 Dreyecken „ 6 Quadraten,
d) „ 8 Dreyecken „ 18 Quadraten,
e) „ 20 Dreyecken „ 12 Zehnecken,
f) „ 20 Dreyecken „ 12 Fünfecken,
g) „ 32 Dreyecken „ 6 Quadraten,
h) „ 80 Dreyecken „ 12 Fünfecken,
i) „ 6 Quadraten „ 8 Sechsecken,
k) „ 12 Fünfecken „ 20 Sechsecken; sodann
l) „ 6 Achtecken, „ 8 Sechsecken und 12 Quadraten,
m) von 20 Dreyecken, 8 Sechsecken und 12 Quadraten,
n) „ 30 Quadraten, 20 Sechsecken und 12 Zehnecken,

Fig. 3) Die symetrischen Körper werden zwar nicht von regelmäßigen Vielecken, doch aber von andern vollkommen gleichen und einer geraden Anzahl der Figuren nach einer gewissen Ordnung begrenzt. So gibt es z. B. von 12 Rauten, von 30 Rauten, 24 gleichschenkeligen Dreyecken, von 60 solchen Dreyecken eingeschlossen symetrische Körper u. s. w.

§. 180.

Von allen diesen und den vorhergehenden geometrischen Körpern kann man sich deutlichere Begriffe verschaffen, wenn man den Umfang (die Netze) dieser Körper aus etwas steifem Papier ausschneidet, und gehörig zusammenleimet. In den folgenden Aufgaben wollen wir zeigen, wie die Netze von einigen der vorzüglichsten, und besonders auf das Bau- und Forstfach Bezug habenden Körper verzeichnet werden.

1) Aufgabe. Das Netz für ein senkrechtes Prisma zu verzeichnen.

112. Auflösung. Man verzeichne zuerst die gegebene Grundfläche
und desjenigen Vieleckes, wovon das Prisma den Namen führt, nämlich
113. ein Dreyeck *a b c* zu einem dreyseitigen, ein Parallelogramm *a b c d* zu einem Parallelepiped, u. s. w., verlängere sodann die Grundlinie *ab* auf beyden Seiten, trage auf diese Verlängerung die noch übrigen Umfangslinien des Vieleckes, wie es die gleichnamigen Buchstaben weisen, errichte in diesen Puncten senkrechte Linien, mache sie der gegebenen Höhe des Prisma gleich, und verzeichne auf der entgegengesetzten Seite die andere Grundfläche, welche der erstern vollkommen gleich ist; so ist das Netz für das verlangte Prisma fertig. Legt man nun dieses nach dem Zuge der Linien zusammen, so hat man einen Körper, den wir Prisma nennen.

114. Eben so wird das Netz für einen Würfel verzeichnet (Fig. 114.).

a) Damit man aber die Flächen befestigen, und dadurch einen Körper vorstellen könne; läßt man einen schmalen Streifen Papier auf einer Seite jeder zwey zusammenstoßenden Flächen stehen, wie es die punctirten Linien in Fig. 112. weisen, und welches auf gleiche Art auch von den übrigen Netzen zu verstehen ist.

2) Aufgabe. Das Netz für einen senkrechten Zylinder zu verzeichnen.

Auflösung. Da die Grundflächen bey einem Zylinder Kreise sind, so beschreibe man mit dem gegebenen Halbmesser *a e* bey *e* einen

Kreis, verlängere den Halbmesser *ea*, trage von *a* bis *b* die gegebene Länge des Zylinders auf, und beschreibe mit dem vorigen Halbmesser aus *f* einen Kreis für die andere Grundfläche, welche durch den Punct *b* geht. Ferner errichte man in *a* und *b* senkrechte Linien von unbestimmter Länge, suche zu dem gegebenen Halbmesser der Grundfläche nach §. 116. 1) die Länge des Umkreises, und trage sie von *b* nach *d*, und von *a* nach *c*, ziehe die Gerade *cd*; so hat man, wenn das Rechteck *abdc* nach den gleichlaufend neben einander gelegten Umkreisen zusammen gebogen und gehörig befestiget wird, einen Zylinder. Fig. 115.

3. Aufgabe. Das Netz für eine gleichseitige Pyramide zu verzeichnen. 116.

Auflösung. Man beschreibe mit der gegebenen Seitenlänge der Pyramide aus *C* einen Bogen *AB*, trage auf diesen eine Seite der Grundfläche als Sehne *ab* auf, verzeichne auf diese Sehne das gegebene Vieleck der Grundfläche, übertrage sodann die übrigen Seiten derselben auf den Bogen *AB* als Sehnen, wie es die gleichnamigen Buchstaben weisen, und verbinde endlich alle auf dem Bogen *AB* bestimmten Puncte mit dem Puncte *C* als der Spitze der Pyramide; so hat man das verlangte Netz.

Soll das Netz einer parallel abgekürzten Pyramide verzeichnet werden, so muß die Länge *CB* der ganzen, und auch die Länge *DB* der abgekürzten Pyramide, so wie auch eine der beyden Grundflächen bekannt seyn. Hierauf errichtet man die Grundfläche und die Sehnen wie vorhin, beschreibt auch noch mit dem Unterschiede *CD* der beyden gegebenen Längen den Bogen *DE*, und verzeichnet aus den auf diesem Bogen bestimmten Sehnen ein ähnliches Vieleck *efhg* zu dem vorigen *abdc*; so wird dieses Netz nach der Lage der Linien zusammengebogen und befestigt, eine abgekürzte Pyramide vorstellen.

4. Aufgabe. Die Oberfläche *ACB* eines senkrechten Kegels zu verzeichnen. 117.

Auflösung. Man beschreibe mit der Seitenlänge *CB* des Kegels einen unbestimmten Bogen *AB*, und suche zu dem gegebenen Halbmesser *CB* nach §. 116. 1) die Länge des ganzen Umkreises *U*. Ferner verlängere man *Cb*, beschreibe mit dem gegebenen Halbmesser *bc* der Grundfläche einen Kreis, der durch den Punct *b* gehet, und suche die Länge seines Umfanges $= u$, sodann schließe man:

$U : u = 360° : x°$; so gibt x die Anzahl der Grade des Winkels *C*, welchen man an die Linie *Cb* verzeichnet (§. 17.), und hierauf

Fig. 117. die Gerade CA ziehet; so ist die Länge des Bogens Ab, der Länge des ganzen Umkreises u der Grundfläche gleich.

Wenn man nun den Bogen Ab um den Umkreis der Grundfläche herumbiegt und befestiget, so hat man einen senkrechten Kegel. Es sey z. B. $Cb = 500$ und $bc = 112$; so findet man die Länge $U = 3140$, die Länge u aber $= 703$; folglich ist $x = 80{,}6^\circ = 80^\circ\ 36' =$ dem Winkel ACb.

5. Aufgabe. Die Oberfläche $Aefb$ eines parallel abgekürzten senkrechten Kegels zu verzeichnen.

Auflösung. Man verfährt ganz nach der vorigen Weise, und beschreibt sodann mit dem Unterschiede der Länge des ganzen, und der Länge des abgekürzten Kegels, nämlich mit $CA - eA = Ce$ den Bogen ef, wie auch mit dem gegebenen Halbmesser eg der oberen Grundfläche einen Kreis, der durch den Punct e gehet, wie aus der Figur zu sehen ist.

Wäre der Halbmesser oder die Größe der oberen Grundfläche nicht gegeben, so kann derselbe aus der Länge Cb, und Cf, und aus dem Halbmesser bc auf folgende Art gefunden werden; es verhält sich $Cb : Cf = bc : eg$. Es sey $Cb = 500$, $Cf = 256$, und $bc = 110$; so ist $eg = 56{,}3$.

5) Aufgabe. Das Netz oder die Oberfläche einer Kugel zu verzeichnen.

118. Auflösung. Man ziehe eine beliebige Gerade CD, trage von A bis B die Länge des Umfanges der gegebenen Kugel, theile AB in eine beliebige Anzahl gleiche Theile (je mehre Theile sind, je besser wird sich das Netz schließen), und den ersten Theil $A1$ wieder in zwey gleiche Theile $Ac = c1$, errichte in c auf AB die Senkrechte ba, die der halben Länge des Umfangs der Kugel, oder $\frac{1}{2}AB$ gleich ist, so zwar: daß die Hälfte von ab über, die andere Hälfte aber unter AB zu stehen kommt. Nun suche man zu den drey Puncten a, 1, und b den Mittelpunct C, welcher in der Linie CD liegen muß (§. 40. 1.), und beschreibe den Bogen $a1b$. Da ferner alle Mittelpuncte der Bogen in der Linie CD liegen; so darf man mit einer Zirkelspitze von C auf der Geraden DC nur so weit vorrücken, bis die andere Spitze des Zirkels den Punct 2, 3, 4, u. s. w. berühret, und die Bogen beschreiben, wie aus der Figur zu ersehen ist. Verfährt man auf der andern Seite auf eben diese Art, so werden sich die Bogen zwischen den gleichlaufenden mn und pq schließen, und so das Netz bilden. Wird endlich der Punct A mit B verbunden,

und die entgegengesetzten Spitzen *a* und *b*, *e* und *d*, u. s. w. gegen einander gebogen; so wird die Kugel mit ziemlicher Genauigkeit gebildet werden. Fig. 118.

Zweyter Abschnitt.

Von der Ausmessung der Oberfläche der Körper.

§. 181.

An den Körpern sind zweyerley Größen zu messen, die Oberfläche, und der in derselben eingeschlossene Raum, der Kubikinhalt. Es wird hierbey unter ersterer immer die gebrochene oder Seiten-Oberfläche verstanden, wenn nicht ausdrücklich ein Anderes erinnert wird, da die Grundflächen als ebene Flächen nach §. 134. bis 141. bestimmt werden können, wenn es erforderlich ist. 96.

§. 182.

Die Seiten-Oberfläche eines jeden senkrechten Prisma $BCef$ (ohne die beyden Grundflächen) ist gleich dem Producte aus dem Umfange der Grundfläche, multiplicirt mit der Höhe, das ist: mit einer Seite des Prisma.

Denn diese Oberfläche ist gleich der Summe der Rechtecke $Ab + bC + Cd + dE + Ef + fA$;

nun aber ist das Rechteck $Ab = AB.Aa = AB.H$
„ „ $bC = BC.Bb = BC.H$
„ „ $Cd = CD.Cc = CD.H$
„ „ $dE = DE.Dd = DE.H$
u. s. w.

} wenn man die gleichen Höhen der Rechtecke mit H bezeichnet.

folglich ist die Summe dieser Rechtecke $AB.H + BC.H + CD.H + DE.H + EF.H + FA.H = (AB + BC + CD + DE + EF + FA).H =$ der Oberfläche dieses Prisma ohne die beyden Grundflächen.

a) Wäre die Oberfläche von dem schief abgeschnittenen senkrechten Prisma $ADgk$ zu bestimmen, so müßte man jedes Trapez Ai, Bh.... insbesondere berechnen, und sodann alle diese Flächeninhalte addiren, um die Oberfläche, ohne die obere und untere Grundfläche, dieses schief abgeschnittenen senkrechten Prisma zu erhalten. Eben so hätte man zu verfahren, wenn die Oberfläche des schiefen Prisma $ABcd$ zu bestimmen wäre. 97.

§. 183.

Fig. 98. Da ein senkrechter Zylinder nichts anders ist, als ein senkrechtes Prisma, dessen Grundflächen Kreise sind (§. 169.); so ist auch die krumme Oberfläche eines senkrechten Zylinders *ABba* (ohne die beyden Grundflächen) gleich dem Producte aus dem Umfange einer Grundfläche mit der Höhe des Zylinders. Ist demnach der Halbmesser der Grundfläche $AM = h$ und die Höhe $Aa = Mm = b$ dieses senkrechten Zylinders, so ist der Umfang der Grundfläche $= 2h\pi$ (§. 116. 1.); folglich seine krumme Oberfläche $= 2h\pi . b$; und die ganze Oberfläche ist $= 2hb\pi + h^2\pi + h^2\pi = 2hb\pi + 2h^2\pi = 2h\pi\,(b + h)$. Es sey z. B. $h = 3'\,5''$ und $b = 2^\circ\,5'$, so ist die ganze Oberfläche $= 2.41''.3{,}14.(204'' + 41'') = 82.3{,}14.245 = 63183\,q'' = 12\,q^\circ\;6\,q'\;111\,q''$.

Ist ein Zylinder gleichseitig, bey welchem nämlich die Höhe dem Durchmesser gleich ist, §. 169. 4), so ist seine krumme Oberfläche $= 4h^2\pi$; die ganze Oberfläche aber $= 6\,h^2\pi$.

§. 184.

Die krumme Oberfläche eines schief abgeschnittenen senkrechten Zylinders *ABbf* ist gleich dem Producte aus dem Umfange der Grundfläche mit der halben Summe der größten und kleinsten Höhe dieses Zylinders.

Dieß einzusehen denke man in der größten und kleinsten Höhe durch die Puncte *b* und *f* zwey parallele Durchschnitte zur Grundfläche, und den Zylinder durch das Stück *fab* ergänzt; so sind beyde Durchschnitte Kreise und der Grundfläche gleich (§. 171.). Es besteht nun der ergänzte Zylinder *aB* aus den zweyen *ag* und *fB*.

Es ist nämlich $fB + ag = aB$;

nun aber ist $fB = u.Bg$ und $ag = u.bg$ } wenn man den Umfang des Zylinders mit u bezeichnet

daher ist auch $fB + ag = aB = u.Bg + u.bg$.

Vermöge §. 177. ist das Stück $fgb = fba$, weil die gleichnamigen Abmessungen einander gleich sind; es ist nämlich $fbg = \frac{1}{2}ag = \frac{1}{2}u.bg$;

und endlich ist die krumme Oberfläche des schief abgeschnittenen senkrechten Zylinders

$AfbB = fB + fbg = u\,.\,Bg + \tfrac{1}{2}u\,.\,bg = u\,(Bg + \tfrac{1}{2}bg)$ Fig.
$= u\,.\left(\frac{2Bg+bg}{2}\right) = u\,.\left(\frac{Bg+Bg+bg}{2}\right) = u\left(\frac{Af+Bb}{2}\right)$; 98.
weil $Bg = Af$ und $Bg + bg = Bb$ gesetzt werden kann.

a) Ist ein Zylinder zu beyden Seiten schief, aber nicht parallel abgeschnitten; so kann man ihn aus zwey der vorhergehenden zusammengesetzt betrachten, wenn man sich zwischen den beyden Abschnitten in irgend einem Puncte auf die Achse einen senkrechten Durchschnitt denkt.

b) Und wäre die krumme Oberfläche eines zu beyden Seiten schief, aber parallel abgeschnittenen Zylinders *Ab* zu bestimmen; so multiplicire man den Umfang eines auf die Achse senkrecht gelegten Durchschnittes *fg* mit der Länge $Aa = Bb$ des Zylinders. 99.

§. 185.

Die Seiten-Oberfläche einer regelmäßigen Pyramide *ABCDE* (ohne die Grundfläche) ist gleich dem Producte aus dem Umfange der Grundfläche mit der halben Senkrechten, welche aus der Spitze der Pyramide auf was immer für eine Seite der Grundfläche gezogen wird. 100.

Denn diese Oberfläche ist gleich der Summe der Dreyecke $ABE + BCE + CDE + DAE$, welche alle die auf eine beliebige Seite der Grundfläche gefällte Senkrechte *EF* zur Höhe haben; es ist nämlich

das Dreyeck $ABE = AB.\tfrac{1}{2}EF$
„ „ $BCE = BC.\tfrac{1}{2}EF$
„ „ $CDE = CD.\tfrac{1}{2}EF$
„ „ $DAE = DA.\tfrac{1}{2}EF$; folglich ist die Summe dieser Dreyecke $AB.\tfrac{1}{2}EF + BC.\tfrac{1}{2}EF + CD.\tfrac{1}{2}EF + DA.\tfrac{1}{2}EF = (AB + BC + CD + DA).\tfrac{1}{2}EF$ = der Oberfläche dieser regelmäßigen Pyramide ohne die Grundfläche.

a) Wäre die Oberfläche einer unregelmäßigen Pyramide *ABCDEM* zu bestimmen; so muß man, weil hier die Dreyecke ungleich sind, jedes insbesondere berechnen, und sodann den Flächeninhalt aller Dreyecke addiren, um die Oberfläche einer solchen Pyramide, ohne die Grundfläche, zu erhalten. 95.

§. 186.

Da ein senkrechter Kegel *ABC* als eine regelmäßige Pyramide angesehen werden kann (§. 172. 3.); so ist auch die krumme Oberfläche eines senkrechten Kegels (ohne die Grund- 102.

Fig. 102. fläche) gleich dem Producte aus dem Umkreise der Grundfläche, mit der halben Seite des Kegels. Es sey z. B. der Halbmesser $AM = h$, und die Länge der Seite $CD = b$ des Kegels; so ist seine Oberfläche $= 2\,h\pi.\frac{1}{2}b = h\,b\,\pi$.

§. 187.

101. Die Seiten-Oberfläche einer regelmäßigen parallel abgekürzten Pyramide $ABcd$ (ohne die beyden Grundflächen) ist gleich dem Producte aus dem Umfange desjenigen Durchschnittes $rstu$, welchen man in der Mitte zwischen den beyden Grundflächen zu diesen parallel führt, multiplicirt mit der Senkrechten nR, die man von einem Puncte des obern Umfanges auf den Umfang der untern Grundfläche zieht.

Denn diese Oberfläche besteht aus lauter Trapezen, die alle einerley Höhe Rn haben;

$$\left.\begin{array}{ll} \text{nun aber ist das Trapez } BCcb = st.Rn \\ \text{„ „ } CDdc = tu.Rn \\ \text{„ „ } DAad = ur.Rn \\ \text{„ „ } ABba = rs.Rn \end{array}\right\} \text{vermöge §. 137;}$$

folglich ist die Oberfläche von $ABcd = st.Rn + tu.Rn + ur.Rn + rs.Rn = (st + tu + ur + rs).Rn$.

Man erhält auch den Umfang der mittlern Durchschnittsfläche $rstu$, wenn man die Umfänge der beyden Grundflächen addirt, und diese Summe durch 2 theilet (§. 137.).

§. 188.

103. Die Seiten-Oberfläche eines parallel abgekürzten senkrechten Kegels $ABba$ (ohne die beyden Grundflächen) ist gleich dem Producte aus dem Umkreise $cedf$ desjenigen Durchschnittes, welchen man in der Mitte zwischen den beyden Grundflächen zu diesen parallel führt, multiplicirt mit einer Seite Aa des abgekürzten Kegels.

Denn ein parallel abgekürzter senkrechter Kegel ist als eine parallel abgekürzte senkrechte Pyramide anzusehen, an welcher die gleichlaufenden Seiten der Trapeze unendlich klein, mithin die Grundflächen Kreise sind. Nun aber ist die Oberfläche einer solchen Pyramide gleich dem Producte aus dem Umfange des parallelen Durchschnittes zwischen den beyden Grundflächen, multiplicirt mit der senkrechten,

zwischen den Seiten des obern und untern Umfangs eingeschlossenen Höhe (§. 187.); folglich ist auch die Oberfläche eines parallel abgekürzten senkrechten Kegels gleich dem Producte aus dem Umkreise des zwischen den beyden Grundflächen parallel gelegten Durchschnittes, multiplicirt mit einer Seite des abgekürzten Kegels. Es ist nämlich die Oberfläche von $ABba = cd.\pi.Aa$. Fig. 103.

Man findet den Umkreis $cedf$, wenn man in der Mitte zwischen den beyden Grundflächen den Durchmesser cd, und hierzu nach §. 116. 1.) den Umkreis bestimmt, oder wenn man die Umkreise der beyden Grundflächen addirt, und ihre Summe durch 2 theilet (§. 187.).

§. 189.

Die Oberfläche einer Kugel erhält man, wenn man den Umfang eines größten Kreises derselben mit seinem Durchmesser multiplicirt.

Um diese Wahrheit einzusehen, sey $AmBwA$ ein größter Kreis einer Kugel, $AM = MB = h$ der Halbmesser derselben; in diesem Kreise sey ein regelmäßiges Vieleck von einer geraden und so großen Anzahl Seiten eingeschrieben, daß Seiten und Bogen bis zur Unmerklichkeit sich decken; die Gerade mn sey eine solche Seite. Man ziehe auf zwey gegenüber stehende Seiten des Vieleckes einen senkrechten Durchmesser AB, sodann auf eine Seite mn einen senkrechten Halbmesser $gM = h$; so wird mn in dem Puncte g in zwey gleiche Theile getheilt (§. 39. 1.); nun führe man die Geraden mq, gi und np senkrecht auf AB, wie auch nf senkrecht auf mq; so ist das rechtwinkelige Dreyeck $mnf \sim igM$ (§. 61. 1.); in welchem der Winkel $gMi = nmf$ ist, und es verhält sich 119.

$$mn : nf = gM : gi$$

oder $mn : nf = 2.gM.\pi : 2.gi.\pi$ (Rk. 268. V.);

und es ist $2gi.\pi.mn = 2gM.\pi.nf$ (Rk. 265.)

oder $2gi.\pi.mn = 2h.\pi.pq$, weil $gM = h$ und $nf = pq$ ist (§. 34.).

Nun stelle man sich vor, daß das Trapez $mnpq$ um den Durchmesser AB ganz herum bewegt werde; so wird dadurch ein parallel abgekürzter senkrechter Kegel, durch die Gerade mn die krumme Oberfläche, und durch den Punct g der Umkreis des mittlern Durchschnittes zwischen den beyden Grundflächen desselben beschrieben (§. 173. 4.), wobey gi den Halbmesser dieses Umkreises, das Trapez $mnvw$ aber den Durchschnitt dieses abgekürzten Kegels vorstel-

let. Denkt man sich ferner die Seite mn unendlich klein, wie wir Fig. gleich Anfangs festgesetzt haben, ist nämlich das eingeschriebene Viel- 119. eck ein Unendlicheck; so fällt jede Seite mit ihrem abgeschnittenen Bogen über einander, oder ihr Unterschied ist kleiner, als sich angeben läßt. Man kann daher die Oberfläche der durch $mgnpq$ entstandenen unendlich kleinen Zone der Oberfläche des durch $mnpq$ entstandenen abgekürzten unendlich kleinen Kegels gleich setzen. Nun aber drückt der erste Theil der oben aufgestellten Gleichung die krumme Oberfläche des parallel abgekürzten senkrechten Kegels $mnvw$ aus, der zweyte Theil dieser Gleichung aber ist das Product aus dem Umfange eines größten Kreises der Kugel, multiplicirt mit der Höhe oder Achse dieses abgekürzten Kegels; daher ist die Oberfläche des abgekürzten Kegels $mnvw$ und folglich auch die Oberfläche der Zone $mnvw$ gleich dem Producte aus der Länge des Umfanges eines größten Kreises der Kugel, mit der eigenen Höhe $nf = pq$ des abgekürzten Kegels oder der Zone, nämlich $= 2h\pi . pq$. Da sich dieses nun von allen in einer Kugel eingeschriebenen abgekürzten unendlich kleinen Kegeln oder Zonen, welche als Theile oder Elemente der Kugel zu betrachten sind, beweisen läßt; so besteht die Oberfläche einer Kugel aus der Summe der Oberflächen dieser Kegel oder Zonen, welche einen unendlich kleinen Theil des Durchmessers der Kugel zur Höhe haben, und deren Höhen zusammen genommen dem Durchmesser der Kugel gleich sind. Diesem nach ist die Oberfläche des abgekürzten Kegels oder Kugelabschnittes . . . . $ACD = 2h\pi . Ar$

die Oberfläche der Zone $CnvD = 2h\pi . rp$

„ „ „ „ $nmwv = 2h\pi . pq$

u. s. w.;

folglich ist die Oberfl. einer Kug. $= 2h\pi . Ar + 2h\pi . rp + 2h\pi . pq +$ u. s. w.

oder $= 2h\pi\,(Ar + rp + pq + \ldots .) = 2h\pi . AB$ $= 2h\pi . 2h = 4h^2\pi =$ dem Producte aus dem Umfange eines größten Kreises der Kugel mit dem Durchmesser derselben.

Hieraus folgt:

1) Daß die Kugelfläche 4 Mahl so groß ist, als der Flächeninhalt eines dazu gehörigen größten Kreises.

Denn für den Halbmesser einer Kugel $= h$, ist ein dazu gehöriger größter Umkreis $= 2h\pi$, und folglich die Kugelfläche =

$2h\pi . 2h = 4h^2\pi$; der Flächeninhalt eines dazu gehörigen größten Kreises hingegen ist nur $2h\pi . \frac{1}{2}h = h^2\pi$ (§. 141.). Fig. 119.

2) Die krumme Oberfläche eines Kugelabschnittes EBF ist dem Producte aus einem größten Umkreise der Kugel mit der Höhe sB des Abschnittes gleich, nämlich $2h\pi . sB$.

3) Da die Halbkugel nichts anders ist, als ein Kugelabschnitt, welcher den Halbmesser der Kugel zur Höhe hat; so ist auch die Oberfläche derselben gleich dem Producte aus einem größten Umkreise der Kugel mit dem Halbmesser derselben.

4) Die krumme Oberfläche einer Zone $DFEC$ ist gleich dem Producte aus dem Umfange eines größten Kreises der Kugel, multiplicirt mit der Höhe der Zone.

Denn die Oberfläche der Zone $CEFD$ besteht, vermöge des Vorigen, aus der Summe der Oberflächen der unendlich kleinen Zonen $CnvD$, $nmwv$, u. s. w., deren unendlich kleine Höhe $rp + pq + \ldots$ die Höhe rs dieser Zone $CEFD$ ausmachen.

5) Endlich verhalten sich die Oberflächen der Kugeln von verschiedenen Durchmessern, wie die Quadrate der Halbmesser, wie die Quadrate der Durchmesser, u. s. w. Denn es sey der Halbmesser einer Kugel $= h$, und dessen Oberfläche $= o$; der Halbmesser einer andern Kugel $= H$, die Oberfläche derselben $= O$;

so ist $o = 4h^2\pi$

und $O = 4H^2\pi$

folglich auch $o : O = 4h^2\pi : 4H^2\pi = 4h^2 : 4H^2 = h^2 : H^2$ (Rk. 72. I. und 268. VI.).

a) Da der Halbmesser unsers Erdballes (als Kugel betrachtet) 860 geographische Meilen beträgt (weil man auf 1 Grad eines größten Umkreises der Erdkugel 15 geographische oder deutsche Meilen, folglich auf den ganzen Umkreis $360 . 15 = 5400$ solche Meilen rechnet); so ist die Oberfläche unsers Erdballes $= 4 . (860)^2 . 3,14 = 9289376$ geographische Quadrat-Meilen.

Dritter Abschnitt.

Von der Ausmessung des Kubikinhaltes der Körper.

§. 190.

Fig. Man kann sich vorstellen, daß der Kubikinhalt eines Körpers ausgemessen wird, wenn man untersucht, wie oft ein bekannter, für die Einheit angenommener Körper, das Maß, in demselben enthalten ist, das heißt: wie viel Mahl sich der bekannte Körper in dem auszumessenden herumlegen lasse. Die Zahl nun, welche anzeigt, wie oft der bekannte Körper in dem auszumessenden enthalten ist, bestimmt den Kubikinhalt dieses Körpers in eben solchen Einheiten ausgedrückt, als der für das Maß oder die Einheit angenommene Körper ist.

Das Maß oder der für die Einheit angenommene Körper, womit andere Körper ausgemessen werden, ist gemeiniglich ein Würfel oder Kubus, dessen jede Seite bald einen Zoll, bald einen Schuh, bald eine Klafter, zuweilen auch eine Meile beträgt; und der sodann in Hinsicht auf die Seite Kubik-Zoll, Kubik-Schuh, Kubik-Klafter, u. s. w. genennt wird.

a) Die Kubikmaße werden auf eben die Art, wie die Längen- und Flächenmaße bezeichnet; nur pflegt man, um jene von diesen zu unterscheiden, den Buchstaben k zu den gewöhnlichen Zeichen noch hinzu zu setzen. So z. B. bedeuten 256 k° 78 k' 928 k'' einen Körper, der 256 Kubik-Klafter, 78 Kubikschuhe und 928 Kubikzolle enthält; wo aber die Ruthe anstatt der Klafter gebräuchlich ist, bedeutet die erste Zahl 256 Kubik-Ruthen, u. s. w.

§. 191.

120. Der Kubikinhalt eines senkrechten Parallelepiped BH wird erhalten, wenn man seine drey Abmessungen AB, BC und BF (in Zahlen ausgedrückt §. 9.) mit einander multiplicirt.

1) Es sey der zum Maße angenommene Würfel $M = 1$ (Kubikschuh z. B.), und dessen Seite lasse sich in der Länge AB der Grundfläche des Parallelepiped, a Mahl (z. B. 5 Mahl), in der Breite BC, b Mahl (4 Mahl), und in der Höhe oder Dicke BF desselben c Mahl (3 Mahl) auftragen. Nun denke man durch die Puncte 1, 2, 3 . . . der Länge der Grundfläche parallele Ebenen

zur Seitenfläche AH; sodann durch die Puncte 6, 7, 8 . . . . der Breite der Grundfläche parallele Ebenen zur Seitenfläche EB; endlich denke man durch die Puncte 10, 11 . . . der Höhe oder Dicke BF des Parallelepiped parallele Ebenen gelegt zur Grundfläche BD; so ist es überzeugend, daß der Kubikinhalt des Parallelepiped dadurch in lauter vollkommen gleiche Würfel getheilt wird, deren jeder dem für das Maß (für die Einheit) angenommenen Würfel M gleich ist, weil sie auf eine vollkommen gleiche Art bestimmt sind. Fig. 120.

Es sind nämlich in 1 Reihe a Würfel
„ 2 Reihen $2a$ „
„ 3 „ $3a$ „
. . . .
und in 1 Schichte oder in b „ $b.a$ „
Da also in 1 Schichte $b.a$ Würfel liegen,
so liegen „ 2 Schichten $2b.a$ „
. . . .
und „ c „ $c.b.a = 3.4.5 = 60$ Würfel = dem Kubikinhalte des senkrechten Parallelepiped AH.

2) Ist die Seite des gewählten Maßes in den Seiten des auszumessenden Parallelepiped nicht genau enthalten, so wendet man die bereits §. 9. und 123. 2) erklärte Verfahrungsart an. Man untersucht nämlich, wie viel Theile jede Seite des auszumessenden Parallelepiped auf einem beliebigen geometrischen Maßstabe enthält; und wenn man sodann die Anzahl Theile auf der Länge mit der Anzahl der gleichen Theile auf der Breite, und mit der Anzahl der gleichen Theile in der Dicke oder Höhe desselben multiplicirt, so erhält man den Kubikinhalt eines jeden senkrechten Parallelepiped.

Oder wenn man die Ganzen für die Theile setzet (Rk. 40. I.), und weil $AB.BC =$ der Grundfläche BD ist (§. 123.); so kann man auch sagen: Der Kubikinhalt eines senkrechten Parallelepiped ist gleich dem Producte aus der Grundfläche mit der Höhe oder Dicke desselben.

§. 192.

Wenn man bey einem Würfel eine Seite desselben drey Mahl als Factor in der Multiplication ausdrückt, oder sie zur dritten Potenz erhebt, so erhält man seinen Kubikinhalt.

Denn der Würfel oder Kubus ist ein senkrechtes Parallelepi-

Fig. 120. ped, bey welchem die Länge, Breite und Dicke einander gleich sind (§. 169. 2.); folglich ist vermöge des Vorhergehenden der Kubikinhalt eines Würfels, dessen jede Seite in der Länge 1 Klafter = 6 Schuhe beträgt, nämlich eine Kubikklafter = 6 . 6 . 6 = 6^3 = 216 Kubikschuhen; ein Kubikschuh ist = 12 . 12 . 12 = $(12)^3$ = 1728 Kubikzollen; ein Kubikzoll ist = $(12)^3$ = 1728 Kubiklinien, u. s. w.; folglich ist 1 Kubikklafter = 216 . 1728 = 373248 Kubikzollen, u. s. f.

Bey dem Decimal-Maße (Rk. 284. I.) enthält die Kubikklafter 1000 Kubikschuhe, der Kubikschuh 1000 Kubikzoll, u. s. w., folglich ist 1 Kubikklafter = 1000 k′ = 1000000 k″ = 1000000000 k‴, u. s. f.; daher sind z. B. 4 k° 24 k′ 506 k″ = 4024506 k″; und umgekehrt sind 36184296 k″ = 36 k° 184 k′ 296 k″, indem man nur von der Rechten gegen die Linke für jede kleinere Maßgattung bis zur höchsten, zur Kubikklafter, drey Ziffern abschneidet.

Oder auch, es sind z. B. 16 k° 48 k′ 218 k″ = 16,048218 k° vermög Rk. 122 und 112.

§. 193.

1) Ist die Länge und Breite der Grundfläche und auch die Höhe eines Parallelepiped, oder nur Eine dieser drey Abmessungen in Klaftern, Schuhen u. s. w. ausgedrückt, so muß man, damit dieser Körper mit einerley Einheit gemessen werde, die größern Maßgattungen auf die kleinste, oder umgekehrt, die kleinern auf die größte Maßgattung bringen (Rk. 122.), und sodann diese drey, in einerley Einheiten ausgedrückten Abmessungen mit einander multipliciren, um den Kubikinhalt des Parallelepiped zu erhalten. Es sey z. B. im Decimalmaße eines senkrechten Parallelepiped

Länge = 7° 8′ = 780″
Breite = 2° 4′ = 240″
Höhe = 0° 5′ 9″ = 59″
so ist die Grundfläche = 780″ × 240″ = 187200 *q*″
folglich der Kubikinhalt = 187200 *q*″ × 59″ = 11044800 k″
= 11 k° 44 k′ 800 k″.

Oder: 7° 8′ = 7,8°
2° 4′ = 2,4°
0° 5′ 9″ = 0,59°

daher 7,8° × 2,4° × 0,59° = 11,0448 k° (Rk. 117.).

2) Ist im zwölftheiligen Maße eines senkrechten Parallelepiped

Fig.

Länge $= 4^\circ\ 3 \quad = 324''$
Breite $= 2^\circ\ 0' \quad = 144''$
Höhe $= 1^\circ\ 2'\ 3'' = \quad 99''$
so ist dessen Kubikinhalt $= 324''.\ 144''.\ 99'' = 4618944\ k''$
und ferner $4618944\ k'' : 1728 = 2673\ k'$;
endlich $2673\ k' : 216 = 12\ k^\circ + 81\ k'$;
also Kubikinhalt des Parallelep. $= 12\ k^\circ\ 81\ k'$.

Oder : weil $4^\circ\ 3' = \frac{9^\circ}{2}$
$2^\circ\ 0' = 2^\circ$
$1^\circ\ 2'\ 3'' = \frac{11^\circ}{8}$ sind,

so ist $\frac{9^\circ}{2} . 2^\circ . \frac{11^\circ}{8} = 12\frac{3}{8}\ k^\circ = 12\ k^\circ\ 81\ k'$ wie oben.

§. 194.

So wie man für Berechnungen im Baufache die Quadratklafter in 6 gleiche Theile (Streifen, Riemen) zu theilen pflegt, so theilt man daselbst auch die Kubik-Klafter in 6 gleiche Theile (Schichten), welche **Kubik-Klafterschuhe** heißen. Jede solche Schichte denkt man ferner in 12 gleiche Schichten getheilt, die man **Kubik-Klafterzolle** nennt; jeder Kubik-Klafterzoll wird wieder in 12 **Kubik-Klafterlinien** getheilt u. s. w. Ein Kubik-Klafterschuh (Kbkl′) ist demnach ein senkrechtes Parallelepiped, welches 1 Quadratklafter zur Grundfläche, zur Höhe aber 1 Schuh enthält; ein Kubik-Klafterzoll (Kbkl″) ist ein senkrechtes Parallelepiped von der Grundfläche $= 1\ q^\circ$ und Höhe $= 1''$; eine Kubik-Klafterlinie (Kbkl‴) enthält zur Grundfläche $= 1\ q^\circ$ zur Höhe aber $= 1'''$ u. s. w.

Vermöge dieser Eintheilung, Benennung und Bezeichnung ist demnach

1) 1 Kbkl′ $= \frac{1}{6}$ Kb° $= 36$ Kb′;
2) 1 Kbkl″ $= \frac{1}{12}$ Kbkl′ $= 3$ Kb′;
3) 1 Kbkl‴ $= \frac{1}{12}$ Kbkl″ $= \frac{1}{4}$ Kb′ $= 432$ Kb″;
4) 1 Kbkl^{IV} $= \frac{1}{12}$ Kbkl‴ $= 36$ Kb″;
5) 1 Kbkl^{V} $= \frac{1}{12}$ Kbkl^{IV} $= 3$ Kb″;
6) 1 Kbkl^{VI} $= \frac{1}{12}$ Kbkl^{V} $= \frac{1}{4}$ Kb″ $= 432$ Kb‴;

Und umgekehrt:

7) 1 Kb′ $= \frac{1}{36}$ Kbkl′ $= \frac{1}{36} . 12$ Kbkl″ $= \frac{1}{3}$ Kbkl″ $= 4$ Kbkl‴;
8) 1 Kb″ $= \frac{1}{36}$ Kbkl^{IV} $= \frac{1}{3}$ Kbkl^{V} $= 4$ Kbkl^{VI};
9) 1 Kb‴ $= \frac{1}{36}$ Kbkl^{VII} $= \frac{1}{3}$ Kbkl^{VIII} $= 4$ Kbkl^{IX}; u. s. w.

Fig.

Bey der wirklichen Ausübung kann die Verwandlung des Schichtenmaßes in Kubikmaß, und umgekehrt, durch folgende Tabelle auf ähnliche Art, wie bey der Berechnung der Flächen (§. 126.) sehr schnell vorgenommen werden.

Schichtenmaß.	Kubikmaß.	Schichtenmaß.	Kubikmaß.	Kubikmaß.	Schichtenmaß.
1 Kbkl′	36 Kb′	1 Kbsch″	144 Kb″	1 Kb′	4 Kbkl‴
1 Kbkl″	3 Kb′	1 Kbsch‴	12 Kb″	1 Kb″	4 Kbkl^{VI}
1 Kbkl‴	432 Kb″	1 Kbsch^{IV}	1 Kb″	1 Kb‴	4 Kbkl^{IX}
1 Kbkl^{IV}	36 Kb″	1 Kbsch^{V}	144 Kb‴	1 Kb^{IV}	4 Kbkl^{XII}
1 Kbkl^{V}	3 Kb″	1 Kbsch^{VI}	12 Kb‴	1 Kb^{V}	4 Kbkl^{XV}
1 Kbkl^{VI}	432 Kb‴	1 Kbsch^{VII}	1 Kb‴	1 Kb″	1 Kbsch^{IV}
1 Kbkl^{VII}	36 Kb‴	1 Kbsch^{VIII}	144 Kb^{IV}	1 Kb‴	1 Kbsch^{VII}
1 Kbkl^{VIII}	3 Kb‴	1 Kbsch^{IX}	12 Kb^{IV}	1 Kb^{IV}	1 Kbsch^{X}

§. 195.

Die Berechnung des Kubikinhaltes eines senkrechten Parallelepiped in Kb° Kbkl′ Kbkl″ Kbkl‴ u. s. w., wenn die Abmessungen in Klaftern, Schuhen, Zollen, Linien ꝛc. gegeben sind, wird sehr bequem durch den im §. 127 angeführten Rechnungsvortheil verrichtet. Es sey z. B. an einer Mauer die

Länge =	13°	4′	0″ . . .	‴
Dicke =	0	3	3″	
	0	39	24	
			39	24
Grundfläche =	7 q°	2	5	0
Höhe =	6	4		
	42	12	30	
		28	16	40
Kubikinhalt =	49 Kb°	2 Kbkl′	1 Kbkl″	4 Kbkl‴

Es werden nämlich bey der Multiplication der in q° qkl′ qkl″ ꝛc. ausgedrückten Grundfläche mit der in Klaftern, Schuhen, Zollen...

gegebenen Dicke oder Höhe eben so, wie im §. 127., diejenigen Partial-Producte verdoppelt, bey welchen keiner der Factoren ganze Klaftern bedeutet. Die in der angeführten Ordnung niedergeschriebenen einzelnen Producte werden sodann, rechts angefangen, addirt, und durch die bekannten Reductionszahlen 12 und 6 auf die nächst größern Gattungen gebracht. Fig.

Die Richtigkeit dieses Rechnungsvortheiles erhellet aus einer ähnlichen, im §. 127. angeführten Erläuterung.

a) Wenn man zur Ausmessung der körperlichen Inhalte den Kubikschuh für die Einheit annimmt, und denselben in 12 Kubik-Schuhzolle, den Kubik-Schuhzoll in 12 Kubik-Schuhlinien rc. eintheilet, so wird die Berechnung eben so, wie §. 195 geführt; nur werden die Partial-Producte der Klaftertheile nicht verdoppelt.

Soll nun am Ende einer solchen Rechnung das Schichtenmaß in Kubikmaß verwandelt werden, so kann dieß mittelst der Tabelle §. 194 sehr leicht und schnell geschehen.

§. 196.

Da der Kubikinhalt eines senkrechten Parallelepiped aus dem Producte der Grundfläche mit der Höhe besteht (§. 191.), so kann man aus dem bekannten Kubikinhalte und der Höhe desselben die Grundfläche, so wie aus dem Kubikinhalte und der Grundfläche die Höhe bestimmen; wenn man im ersten Falle den Kubikinhalt durch die Höhe, im zweyten aber durch die Grundfläche dividirt, in beyden Fällen ist der Quotient die zu suchende Größe.

Dieß kann auf zweyerley Art geschehen:

1) Man bringe sowohl den Dividenden als auch den Divisor auf gleiche Benennung, d. h. den erstern im Kubikmaße, den letztern aber im Längenmaße (oder nach Erforderniß im Flächenmaße) der nämlichen Benennung, dividire sodann jenen durch diesen, so erhält man zum Quotienten die Grundfläche (oder die Höhe) des senkrechten Parallelepiped. Es sey z. B. eines solchen Körpers Kubikinhalt im Decimalmaße $= 11\,k^\circ\ 44\,k'\ 800\,k''$ und dessen Höhe $= 0^\circ\ 5'\ 9''$, so ist $11044800\,k'' : 59'' = 187200\,q'' = 18\,q^\circ\ 72\,q'$ die gesuchte Grundfläche.

Oder Kubikinhalt $= 11{,}0448\,k^\circ$
und Grundfläche $= 18{,}72\,q^\circ$;
so ist $11{,}0448 : 18{,}72 = 0{,}59^\circ$ die gesuchte Höhe.

2) Nun erhellet schon, wie man bey dem zum Grunde liegenden 12theiligen Maße zu verfahren hätte.

Fig.

§. 197.

Ist aus einem körperlichen Inhalte die Kubikwurzel zu ziehen, so verfährt man dabey gewöhnlich am kürzesten, wenn man die kleinsten Gattungen als Brüche der nächst größern vorstellet, und sodann die Wurzel nach den bekannten Regeln auszieht (Rk. 204.). Diese Wurzel ist jederzeit ein Längenmaß, weil ein körperlicher Inhalt in Zahlen ausgedrückt, ein Product aus drey Längenmaßen ist.

1) Es sey z. B. im Decimalmaße der gegebene Kubikraum = $1\,k^{\circ}\ 953\,k'\ 125\,k''$
so ist $\sqrt[3]{1{,}953125\,k^{\circ}} = 1{,}25^{\circ}$.

2) Es sey im 12theiligen Maße der gegebene Kubus = $549\,k^{\circ}\ 184\,k'$; so ist $\sqrt[3]{549\,k^{\circ}\ 184\,k'} = \sqrt{849\tfrac{184}{216}\,k^{\circ}} = 8{,}19^{\circ}$.

3) Wenn ein würfelförmiges Gefäß an Inhalt $5{,}832\,k'$ haben soll, wie lang muß jede Seite desselben werden?

§. 198.

121. Jedes Parallelepiped *ABFG* wird durch eine Diagonal-Ebene *BG* in zwey dreyseitige vollkommen gleiche Prismen *AEG* und *CEG* zerlegt.

Denn die zwey gleichen Parallelogramme *AC* und *HF* werden durch die Diagonalen *BD* und *GE* in gleiche Dreyecke *BDA* = *BDC* und *EGH* = *EGF* zerlegt (§. 67.); es haben daher die zwey dreyseitigen Prismen *AEG* und *CEG* gleiche Grundflächen *BDA* und *BDC*, und gleiche Höhen *BE* und *DG*, mit einem Worte, sie haben alle gleichnamigen Ausmessungen wechselweise gleich, d. h. sie sind vollkommen auf einerley Art bestimmt; folglich sind sie am Kubikinhalte einander gleich (§. 177.). Es ist daher jedes dreyseitige Prisma die Hälfte eines Parallelepiped, welches mit dem erstern einerley Höhe, aber die doppelte Grundfläche desselben zur Grundfläche hat. Man kann daher jedes dreyseitige Prisma *ABG* zu einem Parallelepiped *ABFG* ergänzen, wenn man durch eine Seite *EB* eines der drey einschließenden Parallelogramme zur gegenüber stehenden Seitenfläche *AG* eine parallele Ebene *BF*, sodann auch durch die andere Seite *DG* desselben Parallelogramm eine Ebene *GC* parallel zu *AE* gelegt denket, so werden sich diese zwey Ebenen in *FC* schneiden und das verlangte Parallelepiped begrenzen.

§. 199.

Zwey Parallelepipeden *ADFG* und *ADKL*, welche auf einer gemeinschaftlichen Grundfläche *ABCD* und zwischen zwey parallelen Ebenen *EL* und *DN* stehen, sind am Kubikinhalt einander gleich, wenn sie auch wie immer schief geneigt sind. Fig. 122.

Denn diese zwey Parallelepipeden stehen auf einer nämlichen Grundfläche *ABCD*, und haben das dreyseitige Prisma *ABQPCD* mit einander gemein, daher sind die zwey entgegengesetzten Seitenebenen *ABQ* und *PCD* mit einander parallel (weil jede dieser entgegengesetzten ebenen Flächen sowohl zu dem einen, als auch zu dem andern Parallelepiped gehört). Denkt man nun diese zwey entgegengesetzten parallelen Ebenen *ABQ* und *DCP* weit genug ausgedehnt (§. 155.); so sind auch die Seitenebenen *AHLB* und *DEKC* mit einander parallel (§. 164). Es sind daher die zwey dreyseitigen Prismen *ADEIMH* und *BCFKLG* einander vollkommen gleich, weil ihre gleichnamigen Abmessungen wechselweise gleich, das ist, weil sie vollkommen auf einerley Art bestimmt sind (§. 177.),

es ist nämlich das 3seitige Prisma $ADEIMH = BCFKLG$
davon das gemeinschaftliche 3seitige Prisma $FIQ = FIQ$;
so ist $ADEIMH - FIQ = BCFKLG - FIQ$ (Rk. 54. I.).
nämlich es ist d. schiefabgeschnitt. Prisma $AQPGE = BQPIL$
hierzu das gemeinsch. Ergänzungs-Prisma $ABP = ABP$
folglich ist $AQPGE + ABP = BQPIL + ABP$
es ist nämlich das Parallelepiped $ADFG = ADKL$.

Aus diesem Satze schließen wir:

1) Daß auch dreyseitige Prismen *ACE* und *ACI*, die auf einer gemeinschaftlichen Grundfläche *ACD* und zwischen zwey parallelen Ebenen *EL* und *DN* stehen, am Kubikinhalte einander gleich sind.

Denn man denke jedes dreyseitige Prisma vermög §. 198. zu Parallelepiden ergänzt,

so ist vermöge des Vorigen das Parallelepiped $ADFG = ADKL$
und auch $\frac{1}{2}ADFG = \frac{1}{2}ADKL$ (Rk. 72. I.), nämlich es ist am Kubikinhalt das 3seitige Prisma $ACE = ACI$ (§. 198).

2) Auch Parallelepipeden *ABFE* und *NOKI* oder dreyseitige Prismen *ACE* und *NPI* von gleichen 123.

Fig. 123. (deckenden) Grundflächen, sind gleichhaltig, wenn sie zwischen zwey parallelen Grundebenen *EL* und *SO*, und zwischen zwey parallelen Seitenebenen *AHLO* und *DEKP* stehen; obschon sie nicht eine gemeinschaftliche Grundfläche haben.

Denn man verbinde die Puncte der Grundfläche des einen Parallelepiped mit den Puncten der entgegengesetzten Grundfläche des andern Parallelepiped,

so entsteht ein drittes Parallelepiped *DALK*;

und es ist das Parallelepiped $DALK = DAGF$ } §. 199.

und auch $DALK = NOKI$ }

folglich ist auch das Parallelep. $DAGF = NOKI$ (Rk. 40. III.);

und da $\frac{1}{2}DAGF = \frac{1}{2}NOKI$ ist (Rk. 72. I.);

so ist auch das 3seitige Prisma $ACE = NPI$ (§. 198.).

3) Fället man aus den Puncten *E* und *I* die Senkrechten *ES* und *IR*, so sind diese einander gleich (§. 164.), und da diese Senkrechten sowohl die Höhen der Parallelepipeden *ADFG* und *NOKI* als auch der dreyseitigen Prismen *ACE* und *NPI* sind (§. 168); so können wir sagen: Daß Parallelepipeden, und auch dreyseitige Prismen, die gleiche Grundflächen und gleiche Höhen haben, am Kubikinhalte einander gleich sind.

4) Es ist daher ein wie immer schief stehendes Parallelepiped, am Kubikinhalte gleich einem senkrechten von gleicher Grundfläche und Höhe; und da der Kubikinhalt eines senkrechten Parallelepiped gleich ist dem Producte aus der Grundfläche mit der Höhe (§. 191.); so ist auch der Kubikinhalt eines jeden schief stehenden Parallelepiped dem Producte aus der Grundfläche mit der Höhe gleich.

5) Und da endlich ein dreyseitiges Prisma die Hälfte eines Parallelepiped von gleicher Höhe, aber doppelter Grundfläche ist (§. 198); so ist auch der Kubikinhalt eines jeden dreyseitigen Prisma gleich dem Producte aus seiner dreyseitigen Grundfläche, multiplicirt mit der Höhe desselben.

§. 200.

96. Der Kubikinhalt eines jeden vielseitigen Prisma *ADe* ist gleich dem Producte aus der Grundfläche *ADE* mit der Höhe $Bb = Cc = \ldots H$.

Denn man denke das vielseitige Prisma durch Diagonalebenen in lauter dreyseitige zerlegt; Fig. 96.

so ist das 3 seitige Prisma $ABf = ABF.H$ und „ „ „ $Bfe = BFE.H$ „ „ „ „ $BCe = BCE.H$ vermög §. 199. 5.)

u. s. w.

folglich ist d. vielf. Prisma $ADe = ABF.H + BFE.H + BEC.H$
$= (ABF + BFE + BEC...).H$;
es ist nämlich der Kubikinhalt von $ADe = BCDEA.H =$ dem Producte der Grundfläche, multiplicirt mit der Höhe.

Aus diesem folgt, daß Prismen von gleichen Höhen und gleichen Grundflächen (gleichhaltigen Flächen) am Kubikinhalte einander gleich sind, obschon ihre Grundflächen Vielecke verschiedener Gattung, und die Prismen verschieden geneigt seyn können.

§. 201.

Da man einen senkrechten Zylinder für ein senkrechtes Prisma ansehen kann, dessen Grundflächen regelmäßige Unendlichecke, das ist, Kreise sind, so ist auch der Kubikinhalt eines jeden Zylinders gleich dem Producte aus seiner Grundfläche mit der Höhe. 98.

1) Es sey z. B. der Durchmesser des Zylinders $aB = 12{,}2'' = 1{,}22'$ und die Höhe $= 2{,}3° = 23'$; so ist
der Halbmesser $= \frac{1{,}22}{2} = 0{,}61'$
und die Grundfläche $= (0{,}61)^2 . 3{,}14 = 1{,}17\ q'$
folglich Kubikinhalt $= 1{,}17 \times 23' = 26{,}9$ k'.

2) Es sey im zwölftheiligen Maße der Durchmesser der Grundfläche $AB = 12''$, und die Höhe $Aa = 2°\ 3'$ des Zylinders Ab; so ist der Halbmesser $= \frac{12}{2} = 6'' = \frac{1'}{2}$
daher die Grundfläche $= (\frac{1}{2})^2 . \pi = \frac{1}{4} . 3{,}14 = 0{,}785\ q'$
und der Kubikinhalt $= 0{,}785\ q' . 2°\ 3' = 0{,}785\ q' . 15' = 11{,}775$ k' $= 11$ k' 1349 k'' oder nahe $= 11\frac{3}{4}$ k'.

Man erhält also den Kubikinhalt eines Zylinders oder einer Walze, wenn man die Grundfläche mit der Höhe oder seiner Länge multiplicirt.

§. 202.

Der Kubikinhalt eines schief abgeschnittenen senkrechten Zylinders $ABbf$ ist gleich dem Producte aus der auf die Achse senkrech-

Fig. ten Grundfläche $AdBc$, multiplicirt mit der halben Summe der
98. größten und kleinsten Höhe des Zylinders; es ist

nämlich $ABbf = AdBc \times \frac{Bb + Af}{2}$. Der Beweis wird eben so, wie bey der Bestimmung der Oberfläche dieses Zylinders geführt (§. 184.).

Ist ein Zylinder zu beyden Seiten schief, und nicht parallel abgeschnitten, so kann man ihn aus zwey der hervorgehenden zusammengesetzt betrachten, und so seinen Kubikinhalt bestimmen.

Und wäre endlich der körperliche Inhalt eines zu beyden Enden schief, aber parallel abgeschnittenen Zylinders Ab zu bestim-
99. men; so multiplicire man die Kreisfläche des auf die Achse senkrecht gelegten Durchschnittes fg mit der Länge $Aa = Bb$ dieses Zylinders.

§. 203.

Pyramiden von gleichhaltigen Grundflächen und gleichen Höhen, sind am Kubikinhalte einander gleich, ihre Grundflächen mögen wie immer verschiedenartige Vielecke seyn; welches sich auf folgende Art erweisen läßt.

124. Es seyen in den Pyramiden ACE und FHL die Grundflächen in Hinsicht auf ihren Inhalt und die Höhen einander gleich, nämlich $ABCD = FGHIK$, und die Höhe $NE = ML$. Man theile in Gedanken jede dieser Höhen in unendlich viel gleiche Theile, und denke durch alle Theilungspuncte parallele Ebenen zu den Grundflächen der Pyramiden gelegt, so wird dadurch jede Pyramide in lauter Prismen von gleichen, aber unendlich kleinen Höhen zerlegt. Vermög §. 166. 2) ist die Grundfläche eines jeden solchen Prisma ein ähnliches Vieleck mit der Grundfläche der Pyramide, und verhalten sich wie die Quadrate ihrer Entfernungen von der Spitze der Pyramide; es verhält sich nämlich

$ABCD : abcd = EN^2 : En^2$ } vermög
und auch $FGHIK : fghik = LM^2 : Lm^2$ } §. 166. 3.)
oder $FGHIK : fghik = EN^2 : En^2$ (Rk. 40. II.)

daher auch $ABCD : abcd = FGHIK : fghik$.

In dieser Proportion ist vermöge der Voraussetzung

$$ABCD = FGHIK$$

folglich ist auch $abcd = fghik$ (Rk. 265. 2.).

Da diese gleichen Vielecke die Grundflächen von Prismen sind,

die vermög Construction auch gleiche Höhen haben, so sind ihre Kubikinhalte einander gleich (§. 200.). Nun aber läßt sich dieses von jeden zwey in gleicher Entfernung von den Spitzen der Pyramiden liegenden Prismen beweisen, und da die Anzahl der wechselweise gleichen Prismen in beyden gleich hohen Pyramiden gleich ist, und der Kubikinhalt einer jeden derselben aus der Summe ihrer Prismen besteht; so folgt, daß der Kubikinhalt von Pyramiden, die gleichhaltige Grundflächen und gleiche Höhen haben, einander gleich sind. Fig. 124.

§. 204.

Nun können wir auch zeigen, daß der Kubikinhalt einer dreyseitigen Pyramide gleich dem dritten Theile eines dreyseitigen Prisma ist, welches mit jener gleiche Grundfläche und gleiche Höhe hat. 125.

Man lege in dem dreyseitigen Prisma AFC durch die drey Puncte A, B und F in Gedanken die Ebene BFA; so entsteht die dreyseitige Pyramide $ABEF$, welche mit dem Prisma gleiche Grundfläche ABE, und gleiche Höhe $EF = AD = BC$ hat. Nun denke man durch die drey Puncte B, F und D die Ebene BFD, so wird die dreyseitige Pyramide $FDCB$ abgeschnitten, welche mit der vorigen Pyramide $ABEF$ gleiche Grundfläche und Höhe hat; folglich sind sie am Kubikinhalte einander gleich (§. 203); nun verbleibt von dem Prisma noch die dreyseitige Pyramide $ABDF$ übrig, welche zur Grundfläche das Dreyeck ABD hat, und von den dreyseitigen Seitenflächen BDF, ADF und ABF begrenzt ist. Da das Parallelogramm $ABCD$ durch die Diagonale BD in zwey gleiche Dreyecke getheilt ist (§. 67.); so haben die zwey Pyramiden $FDBC$ und $ABDF$ gleiche Grundflächen BDC und BDA, und gleiche Höhe FG; daher sind sie einander, und folglich auch der vorigen Pyramide $ABEF$ am Kubikinhalte gleich, vermög des vorigen §. u. Rk. 40. III.). Da also das dreyseitige Prisma AFC in drey vollkommen gleiche dreyseitige Pyramiden zerlegt worden,

so ist $ABEF = FDCB = ABDF$

und auch $ABEF + FDCB + ABDF =$ dem Prisma AFC

oder $3\,ABEF = AFC$ (Rk. 134. 3.)

endlich die Pyramide $ABEF = \frac{AFC}{3}$, oder $\frac{ABE \times EF}{3}$ (§. 199. 5.)

Da ferner der Kubikinhalt einer jeden wie immer verschiedenartigen Pyramide von ihrer Grundfläche und Höhe auf einerley Weise abhängt (§. 203); so ist auch der Kubikinhalt

Fig. der Pyramide $ABEF = \frac{1}{3}$ des Prisma $AFC = ABE \,.\, \frac{1}{3} EF$

125. „ „ $FDCB = \frac{1}{3}$ „ „ $AFC = DBC \,.\, \frac{1}{3} FG$

„ „ $ABDF = \frac{1}{3}$ „ „ $AFC = ABD \,.\, \frac{1}{3} FG.$

Aus diesem folgt, daß man den Kubikinhalt einer dreyseitigen Pyramide findet, diese mag senkrecht, oder wie immer schiefstehend seyn, **wenn man ihre Grundfläche mit dem dritten Theile der Höhe multiplicirt.**

§. 205.

95. **Auch den Kubikinhalt einer jeden vielseitigen Pyramide erhält man, wenn man die Grundfläche mit $\frac{1}{3}$ der Höhe multiplicirt.**

Man theile die Grundfläche der gegebenen Pyramide durch Diagonalen AC, AD ... in Dreyecke, und denke durch jede Diagonale und die gemeinschaftliche Spitze der Pyramide eine Ebene gelegt, so wird die vielseitige Pyramide in lauter dreyseitige von einerley Höhe NM zerlegt, und es ist der Kubikinhalt

der 3seitigen Pyramide $ABCM = ABC \,.\, \frac{1}{3} NM$

„ „ „ $ACDM = ACD \,.\, \frac{1}{3} NM$ (§. 204.)

„ „ „ $ADEM = ADE \,.\, \frac{1}{3} NM$

daher $ABCM + ACDM + ADEM = (ABC + ACD + ADE) \frac{1}{3} NM$ (vermög Rk. 47. I.)

endlich Kubikinhalt der vielseitigen Pyramide $= ABCDE \,.\, \frac{1}{3} NM.$

§. 206.

102. Da man einen senkrechten Kegel als regelmäßige Pyramide ansehen kann, deren Grundfläche ein Kreis ist: so wird auch der Kubikinhalt eines Kegels ABC gefunden, **wenn man seine Grundfläche mit $\frac{1}{3}$ der Höhe multiplicirt.**

Es sey z. B. der Durchmesser der Grundfläche $= 1{,}5'$ und die Höhe $= 6{,}2^{\circ} = 62'$

so ist der Halbmesser $= \frac{1{,}5}{2} = 0{,}75'$

daher ist die Grundfläche $= (0{,}75)^2 \,.\, 3{,}14 = 1{,}76\, q'$

endlich der Kubikinhalt $= 1{,}76 \,.\, \frac{1}{3}\, 62' = 36{,}47\, k'$.

a) Hierbey treten die in der Rechenkunst (§. 187.) gezeigten Rechnungsvortheile in ihre vortheilhafte Anwendung.

§. 207.

102. Der Kubikinhalt eines parallel abgekürzten Kegels $ABba$ wird gefunden, **wenn man zuerst die Höhe** mC **des abge-**

schnittenen Stückes abC bestimmt, sodann den ergänzten Kegel ABC und auch den abgeschnittenen abC jeden insbesondere berechnet, und endlich das letzte Resultat vom ersteren abzieht. Die unbekannte Höhe mC des abgeschnittenen Stückes, so wie den Kubikinhalt des abgekürzten Kegels kann man unmittelbar aus seinen zwey Grundflächen, und der Höhe Mm desselben auf folgende Weise bestimmen. Fig. 102.

Man denke sich die Seiten des abgekürzten Kegels, und auch seine Achse verlängert, bis sie in einer Spitze C zusammentreffen und setze, der Einfachheit wegen, die untere gegebene Grundfläche $ADB = G$, die obere $abm = g$, die Höhe $Mm = h$, die Höhe aber des abgeschnittenen Stückes $mC = x$; so ist $MC = Mm + mC = h + x =$ der Höhe des ergänzten Kegels ABC, und es verhält sich $G : g = (MC)^2 : (mC)^2$ (§. 166. 3.)

oder $G : g = (h+x)^2 : x^2$

oder $\sqrt{G} : \sqrt{g} = (h+x) : x$ (Rk. 268. VIII.).

Daraus findet man $x = \frac{h\sqrt{g}}{\sqrt{G}-\sqrt{g}} = mC$, und also die ganze Höhe $MC = h + x = h + \frac{h\sqrt{g}}{\sqrt{G}-\sqrt{g}} = \frac{h\sqrt{G}}{\sqrt{G}-\sqrt{g}}$

Es ist also der Kubikinhalt des ganzen Kegels

$$ABC = G.\tfrac{1}{3}\,MC = \frac{G.\frac{1}{3}h\sqrt{G}}{\sqrt{G}-\sqrt{g}};$$

der Kubikinhalt des Ergänzungskegels aber

$abC = g.\tfrac{1}{3}\,mC = \frac{g.\frac{1}{3}h\sqrt{g}}{\sqrt{G}-\sqrt{g}}$; folglich ist der Kubikinhalt des abgekürzten Kegels

$$ABba = ABC - abC = \frac{G.\frac{1}{3}h\sqrt{G}}{\sqrt{G}-\sqrt{g}} - \frac{g.\frac{1}{3}h\sqrt{g}}{\sqrt{G}-\sqrt{g}} =$$

$$\frac{\frac{1}{3}h(G\sqrt{G}-g\sqrt{g})}{\sqrt{G}-\sqrt{g}} = \frac{\frac{1}{3}h(G\sqrt{G}-g\sqrt{g}).(\sqrt{G}+\sqrt{g})^{*)}}{(\sqrt{G}-\sqrt{g}).(\sqrt{G}+\sqrt{g})} =$$

$$\frac{\frac{1}{3}h(G^2-g\sqrt{Gg}+G\sqrt{Gg}-g^2)^{**)}}{G-g} = \frac{h}{3}\left[\frac{G^2-g^2+\sqrt{Gg}(G-g)}{G-g}\right] =$$

$$\frac{h}{3}\left[\frac{(G+g)(G-g)+\sqrt{Gg}(G-g)}{G-g}\right] = (G+g+\sqrt{Gg}).\frac{h}{3}.$$

Da der Ausdruck $\sqrt{Gg}$ die mittlere geometrische Proportionalgröße zwischen den beyden Grundflächen des gegebenen, parallel

*) Vermög Rk. 95.
**) Vermög Rk. 217.

abgekürzten Kegels ist (Nk. 266. 3.); so folgt daraus diese Regel:
Fig. 102. man erhält den Kubikinhalt eines parallel abgekürzten Kegels, wenn man zwischen der untern und obern Grundfläche die mittlere geometrische proportionale Fläche sucht, diese drey Flächen addirt, und ihre Summe mit dem dritten Theile der Höhe multiplicirt.

Es sey z. B. der untere Durchmesser eines Baumstückes $= 14''$, der obere $= 10''$, und die Länge desselben $= 4^{\circ}\ 3' = 27'$;

so ist die untere Grundfläche $= (\frac{7}{12})^2 . \pi = \frac{49}{144} . 3{,}14 = 1{,}07\ q'$

„ obere „ $= (\frac{5}{12})^2 . \pi = \frac{25}{144} . 3{,}14 = 0{,}54\ q'$

und die mittlere geometr. proport. Fläche $= \sqrt{1{,}07 . 0{,}54} = 0{,}76\ q'$

daher ihre Summe $= 2{,}37\ q'$;

folglich ist der Kubikinh. dieses Baumstückes $= 2{,}37 q' . \frac{27}{3} = 21{,}33$ k'

§. 208.

101. Es ist leicht einzusehen, daß sich dieser Satz auch auf alle parallel abgekürzten Pyramiden erstrecke, und da es in der Ausübung, besonders bey unregelmäßigen Pyramiden, oft sehr schwer ist, die zur Berechnung des körperlichen Inhaltes nöthigen Linien zu bestimmen, so ist dieser Satz hierzu vorzüglich anwendbar. So z. B. können die Kubikinhalte der Gräben und Dämme, bey welchen die untere und obere Grundfläche mit einander parallel laufen; desgleichen das vier- oder mehrkantig beschlagene Holz, bey welchem die Seiten der größern Grundfläche mit den gleichnamigen Seiten der kleinern gegenüber liegenden parallelen Fläche proportional, die nämlich vermög §. 173. 1.) als abgekürzte Pyramiden zu betrachten sind, hiernach berechnet werden.

Es sey z. B. bey einem vierkantig beschlagenen Stück Holz *ABcd*, dessen obere und untere Grundflächen Rechtecke sind, die Seite $AB = 16'' = \frac{16'}{12} = \frac{4'}{3}$, $BC = 12'' = 1'$, $ab = 14'' = \frac{7'}{6}$, $bc = 10\frac{1}{2}'' = \frac{7'}{8}$, und die Länge $Mm = 4^{\circ}\ 2' = 26'$;

so ist die untere Grundfläche $= \frac{4}{3} . 1 = \frac{4}{3}\ q'$

obere „ $= \frac{7}{6} . \frac{7}{8} = \frac{49}{48}\ q'$

mittl. prop. Fläche $= \sqrt{\frac{4}{3} . \frac{49}{48}} = \frac{7}{6}\ q'$

daher ihre Summe $= 3{,}52\ q'$; folglich ist

der Kubikinhalt dieses Stückes $= 3{,}52\ q' . \frac{26'}{3} = 30{,}5$ k'.

Wenn man bey vierkantig beschlagenen Holzstücken die Seiten der obern und untern Grundflächen, nämlich *ab* und *AB*, sodann

auch bc und BC addirt, und jede einzelne Summe durch 2 theilet, so erhält man die Seiten rs und st der mittlern Durchschnitts-fläche $rstu$. Wird diese mit der ganzen Länge Mm des Stückes multiplicirt, so erhält man auch sehr nahe dessen Kubikinhalt. Es seyen die Abmessungen wie vorhin, so ist $\frac{AB+ab}{2} = \frac{16+14}{2} = 15'' = \frac{15'}{12}$ und $\frac{BC+bc}{2} = \frac{12+10{,}5}{2} = 11{,}25'' = \frac{11{,}25'}{12}$, also $rstu = \frac{15'}{12} . \frac{11{,}25'}{12} = \frac{168{,}75}{144} = 1{,}17\,q'$ folglich der Kubikinhalt $= 1{,}17\,q' . 26' = 30{,}42\,k'$, nahe wie vorhin. Fig. 101.

Nach dieser Regel kann auch der körperliche Inhalt solcher Dämme, Gräben etc. berechnet werden, bey welchen die beyden Grundflächen parallel sind, indem man die obere und untere Breite addirt, um die **mittlere Breite** zu erhalten, sodann auch aus der obern und untern Länge die **mittlere Länge** bestimmt, und endlich diese mittlere Breite mit dieser Länge und mit der ganzen Höhe oder Tiefe multiplicirt. Es sey z. B. die obere Länge eines Grabens 18°, die untere 17° 2', die obere Breite 3°, die untere 2° 2' und dessen Tiefe 5'; so ist

die mittlere Länge $= \frac{18° + 17°\ 2'}{2} = 106'$,

„ „ Breite $= \frac{3° + 2°\ 2'}{2} = 16'$;

daher Kubikinhalt $= 106' . 16' . 5' = 8480\ k'$

Man bleibt zwar hier von der Wahrheit etwas weiter zurück, als bey der Berechnung eines Baumstückes, weil da der Unterschied der obern und untern Grundfläche etwas größer als dort ist; jedoch wird man sich in den meisten Fällen auch dieser kürzern Rechnung in der Ausübung mit zureichender Genauigkeit bedienen können.

§. 209.

1) Wenn man bey den walzenförmigen Baumstücken (bey dem sogenannten Rundholz) zwischen dem obern und untern Durchmesser den arithmetischen mittleren Durchmesser sucht, das heißt, **wenn man die beyden ersteren addirt und durch 2 theilet, sodann zu diesem mittleren Durchmesser die dazu gehörige Kreisfläche bestimmt (§. 141.) und diese endlich mit der ganzen Länge des Stückes multiplicirt; so erhält man auch sehr nahe den Kubikinhalt desselben.** Es sey z. B. wie vorhin §. 207. der untere Durchmesser =

Fig. 14″, der obere = 10″, und die Länge eines Baumstückes = 4° 3′ = 27′;

so ist die Summe der beyden Durchmesser = 14 + 10 = 24″

daher der mittlere Durchmesser = $\frac{24}{2}$ = 12″ = 1′

und dessen Kreisfläche = $(\frac{1}{2})^2 . \pi = \frac{1}{4} . 3,14 = 0,785\ q'$;

folglich ist der Kubikinh. des Baumstückes = 0,785 q'. 27′ = 21,19 k′; also ist der Kubikinhalt nach dieser Regel nur um 21,33 — 21,19 = 0,14 k′ kleiner gefunden worden, als nach dem im vorigen Paragraphe aus richtigen Gründen abgeleiteten Satze. Etwas mehr würde man von der Wahrheit abweichen, wenn das Baumstück länger, oder der Unterschied der obern und untern Durchmesser größer wäre; hingegen würde man dem wahren Kubikinhalt vielleicht ganz gleich kommen, wenn man das Baumstück in zwey oder mehre Abtheilungen zerlegt denkt, für jeden solchen Theil den mittleren Durchmesser abnimmt, und ihn als Walze berechnet (welches in der Ausübung sehr schnell von Statten geht, besonders wenn man mit der hierzu nöthigen sogenannten Kluppe und den kubischen Tafeln versehen ist), endlich alle diese einzelnen Kubikinhalte addirt, um den körperlichen Inhalt des ganzen Stückes zu erhalten. Man vergleiche die 5. Aufgabe §. 216.

2) Bey forstlichen Geschäften wird der Durchmesser der Baumstücke gewöhnlich in Zollen, die Länge aber in Schuhen, und der körperliche Inhalt nach Kubikschuhen gemessen und bestimmt, und da es auf schnelle Förderung des Geschäftes viel ankommt, so dient hierzu die folgende einfache Gleichung $k = d^2 . l . \frac{6}{1100}$, in welcher d den mittlern (verglichenen) Durchmesser in Zollen, l die Länge des Baumstückes in Schuhen, k endlich dessen Inhalt in Kubikschuhen bezeichnet. Es sey wieder ein Baumstück von den obigen Abmessungen zu berechnen, so ist der mittlere Durchmesser $d = 12''$ und $l = 27'$ daher $k = 12^2 . 27 . \frac{6}{1100} = 21,21\ k'$; also nebst der Kürze auch der Wahrheit näher als vorhin. Eine darnach berechnete kubische Tafel ist um so zweckdienlicher, weil in der Ausübung meistens mit der Kluppe der mittlere Durchmesser eines jeden Baumstückes unmittelbar abgenommen wird; und da die Schäfte der Baumstämme vielfältigen Untersuchungen zufolge eine parabolische Form haben, daher ein Baumstück mehr Kubikinhalt enthält, als die abgekürzte Kegelform angibt, so kommt man dem wahren Inhalt sehr nahe, wenn man an demselben den mittlern Durchmesser unmittelbar abnimmt, und daraus seinen Kubikinhalt nach der obigen Gleichung berechnet.

3) Die Richtigkeit dieser einfachen Gleichung erhellet aus Folgendem. Es ist $k = \left(\frac{d''}{2}\right)^2 \pi . l' = \left(\frac{d'}{2.12}\right)^2 \pi . l' = \frac{d^2 l}{4 . 144} . 3{,}14159$ Fig.

$= \frac{d^2 l}{576} . \frac{314159}{100000} = \frac{d^2 l}{100} . \frac{314159}{576000} = \frac{d^2 l}{100} . \frac{6}{11}$, wenn man den Inhalt der mittlern Durchschnittsfläche durch die Division mit 144 in Quadrat-Schuhen ausdrückt, und sodann den Bruch $\frac{314159}{576000}$ vermög Nk. 127 abkürzt.

a) In der obigen Gleichung enthält also der Bruch $\frac{6}{1100}$ schon die Eigenschaft, daß man den Kubikinhalt in Kubikfuß erhält, ungeachtet Durchmesser und Länge eines Baumstammes hier nicht in einerley Einheiten, wie es doch seyn sollte (§. 193), in die Rechnung genommen wird.

§. 210.

Der Kubikinhalt eines schief, nicht parallel, abgeschnittenen dreyseitigen Prisma *ABF* ist gleich dem Producte aus der senkrechten Durchschnittsfläche *HKG*, und dem dritten Theile der Summe seiner drey parallel laufenden Seiten. 126.

Denn man lege in Gedanken auf die drey parallelen Seiten *BC*, *EF* und *AD* die senkrechte Ebene *GHK*, sodann durch die drey Puncte *H*, *E* und *K*, wie auch durch *H*, *F* und *K* die Ebenen *EKH* und *HKF*; so wird dieses Prisma in zwey dreyseitige Pyramiden *HGKE* und *HGKF*, und in zwey vierseitige *ABHKE* und *HKDCF* zerlegt; nun ist

der Kubikinh. der 3 seitigen Pyramide $HKGE = HKG . \frac{1}{3} GE$

" " " " " $HKGF = HKG . \frac{1}{3} GF$

" " " 4 seitigen " $BKE = BK . \frac{1}{3} (En = IG)$

" " " " " $KCF = KC . \frac{1}{3} (Fm = IG)$

folglich ist der Kubikinhalt des schief abgeschnittenen Prisma
$ABF = HKG (\frac{1}{3} GE + \frac{1}{3} GF) + \frac{1}{3} IG (BK + KC) =$
$HKG . \frac{1}{3} EF + ABCD . \frac{1}{3} IG$ (Nk. 47. I. und 158.).

Es ist aber die Grundfläche $ABCD = \frac{1}{2} (AD + BC) . HK$ (§. 137.) und für $\frac{1}{2} HK . IG$ kann das Dreyeck *HKG* gesetzt werden (§. 135.); also ist ferner der Kubikinhalt des Körpers
$ABF = HKG \frac{1}{3} EF + \frac{1}{2} (AD + BC) . HK . \frac{1}{3} IG =$

Fig. 126. $HKG.\frac{EF}{3}+\frac{AD+BC}{3}.(HK.\frac{IG}{2}=HKG)=$

$$HKG.\left(\frac{EF+AD+BC}{3}\right).$$

§. 211.

Mit Hülfe dieses Satzes lassen sich die Kubikinhalte von mehrern unregelmäßigen Körpern berechnen, z. B. von solchen Dämmen und Gräben, bey welchen die obern und untern Grundflächen mit einander nicht parallel sind, doch aber die vier Linien, welche diese Grundflächen begrenzen, parallel laufen. Wenn z. B.
127. die Fig. 127. einen solchen Graben oder Damm, oder andern derley Körper vorstellet, und man denkt sich durch zwey entgegengesetzte Linien *AD* und *GH* eine Diagonalebene *GD*, und auch eine Durchschnittsebene *MKIL* senkrecht auf die vier parallel laufenden Linien *BC*, *GH*, *EF* und *AD* gelegt; so wird dieser vierseitige Körper in zwey dreyseitige, schief abgeschnittene Prismen *EHD* und *HDB* zertheilt, wovon sich jedes vermöge des Vorigen berechnen läßt; es ist nämlich der Kubikinhalt des vierseitigen schief abgeschnittenen Prisma $BGFD=$

$$\left(\frac{AD+GH+EF}{3}\right).LKI+\left(\frac{AD+GH+BC}{3}\right).LKM.$$

Die Seiten der Dreyecke *LKI* und *LKM* lassen sich an einem Damme oder Graben, oder auch an andern Körpern dieser Art leicht messen; mithin kann der Flächeninhalt derselben entweder nach §. 154. 6.), oder aus einer vorausgehenden Verzeichnung dieser Dreyecke und der daraus gemessenen Grundlinien und Höhen, bestimmt werden.

129. a) Der körperliche solide (feste) Inhalt eines hohlen Körpers (z. B. Zylinders oder Parallepiped) wird gefunden, wenn man erstlich den Körper berechnet, als wenn derselbe massiv wäre, sodann auch den Kubikinhalt des leeren Raumes bestimmt, und endlich diesen von jenem abzieht; so ist der Überrest der körperliche, solide Inhalt des hohlen Körpers.

b) Kann die Aushöhlung eines solchen Körpers wegen ihrer Unregelmäßigkeit nicht geometrisch bestimmt werden; so wendet man andere Kunstgriffe an; man füllet sie z. B. mit Wasser, Sand u. dgl.; gießt dieses sodann in ein solches Gefäß, dessen hohler Raum sich geometrisch bestimmen läßt. Dieser berechnete Raum ist zugleich der hohle Raum des gegebenen Körpers, welcher vom ganzen Inhalt abgezogen, den soliden Inhalt des hohlen Körpers zu erkennen gibt. Da jedoch an manchen Körpern viel Wasser hängen bleiben würde,

so erhält man ein sicheres Resultat, wenn man das Messungsmittel (Wasser, Sand ꝛc.) früher in einem leicht berechenbaren Raum abmißt, und hierauf den hohlen Raum des gegebenen Körpers damit ausfüllet. Fig. 129.

c) Wenn ein unregelmäßiger Körper so beschaffen ist, daß er sich in bekannte Grundkörper nicht zerlegen oder zerlegt andeuten läßt; so pflegt man seinen Kubikinhalt durch verschiedene andere Kunstgriffe zu suchen, als z. B. wenn er beweglich ist, durch das Einlegen in einen hohlen senkrechten Zylinder, oder in ein hohles Parallelepiped, in welchem man sodann den noch übrigen leeren Raum mit Wasser, oder wenn der eingelegte Körper ohne Nachtheil nicht benetzt werden könne, mit feinem Sande ausfüllet.

Zieht man nun den Körper wieder heraus, so wird sich das Wasser oder der Sand senken, etwa bis n, und ein leerer Raum entstehen, welcher dem Kubikinhalte des eingelegten Körpers gleich ist. Auch hier ist es, wie im vorigen Falle, der mehrern Richtigkeit wegen erforderlich, den Kubikinhalt des Messungs-Mittels in einem leicht bestimmbaren Raume vorher zu erforschen.

§. 212.

Der Kubikinhalt einer Kugel ist gleich dem Producte aus ihrer Oberfläche, mit dem dritten Theile des Halbmessers derselben.

Denn man setze den Halbmesser einer Kugel $AM = Mq = h$; 128.
so ist die Oberfläche derselben $= 4\,h^2\pi$ (§. 189.). Denkt man nun die Oberfläche der Kugel in unendlich viel gleiche Theile, z. B. in unendlich kleine gleiche Dreyecke qpr, u. s. w. getheilt, und von jeder Spitze dieser Dreyecke gerade Linien qM, pM und rM bis an den Mittelpunct M der Kugel gezogen; so kann man jedes dieser Dreyecke als eine ebene Fläche ansehen, und es wird dadurch die Kugel in lauter unendlich kleine Pyramiden (Elementar-Pyramiden) zerlegt, wovon jede derselben den unendlich kleinen Theil $\frac{4h^2\pi}{\infty}$ der Oberfläche der Kugel zur Grundfläche (Rk. 328.) und den Halbmesser h derselben zur Höhe hat; daher ist der Kubikinhalt einer solchen Pyramide $= \frac{4h^2\pi}{\infty} \cdot \frac{1}{3}h$ (§. 204.), und da diese unendlich kleinen Pyramiden alle einander gleich sind (§. 203.), und zusammen genommen die ganze Kugel bilden; so erhält man den Kubikinhalt derselben, wenn man eine solche Elementar-Pyramide unendlich Mahl nimmt (Rk. 329.), es ist nämlich der Kubikinhalt der Kugel =

Fig. 128. $\frac{4h^2\pi}{\infty} \cdot \frac{1}{3}h\,\infty = 4h^2\pi \cdot \frac{1}{3}h = \frac{4}{3}h^3\pi$. Sieht man z. B. unsere Erde als eine vollkommene Kugel an, deren Halbmesser = 860 geographische Meilen ist (§. 189. 5. bey a); so ist der Kubikinhalt unsers Erdballes = $\frac{4}{3}(860)^3 \cdot 3{,}14 = 2662954453$ geographischen Kubikmeilen.

104. Da sich eben dasselbe von einem Kugelausschnitte *aMbCa* sagen läßt; so ist auch der Kubikinhalt eines Kugelausschnittes gleich dem Producte aus dem dazu gehörigen Theil der Kugeloberfläche, multiplicirt mit $\frac{1}{3}$ des Halbmessers der Kugel.

Der Kubikinhalt eines Kugelabschnittes *ambCa* wird erhalten, wenn man den Kubikinhalt des Kegels *abM* von dem Kubikinhalte des Kugelausschnittes *aMbCa* abzieht.

Vierter Abschnitt.

Von der Vergleichung und Verwandlung der Körper.

§. 213.

Die Kubikinhalte der Prismen (und auch der Zylinder) verhalten sich so gegen einander, wie die Producte aus den Grundflächen mit ihren Höhen.

Denn man bezeichne von was immer für einem Prisma oder Zylinder den Kubikinhalt mit *K*, die Grundfläche mit *G*, und die Höhe mit *H*; von einem andern Prisma oder Zylinder aber den Kubikinhalt mit *k*, die Grundfläche mit *g*, und die Höhe mit *h*; so ist der Kubikinhalt des

ersten Prisma oder Zylinders $K = G \cdot H$ ⎫ vermöge §. 200 u. 201,
zweyten „ „ „ $k = g \cdot h$ ⎭

daher $K : k = G \cdot H : g \cdot h$ (Rk. 72. Grunds. I.)

Daraus folgt:

1) Daß die Kubikinhalte der Prismen oder Zylinder, welche gleiche Grundflächen haben, sich wie ihre Höhen; jene von gleichen Höhen aber wie ihre Grundflächen verhalten.

Fig.

Denn setzt man $G = g$,
so verhält sich $K : k = G . H : G . h$ (Rk. 40. II.)
und auch $K : k = H : h$ (Rk. 268. VI.);
setzt man hingegen $H = h$,
so verhält sich $K : k = G . H : H . g = G : g$.

2) Die Kubikinhalte der Zylinder von gleichen Höhen verhalten sich wie die Quadrate ihrer Halbmesser oder ihrer Durchmesser.

Denn es sey der Halbmesser eines Zylinders $= A$, und der eines andern $= a$;

so verhält sich vermöge des Vorigen $K : k = G : g$
und auch $G : g = A^2 : a^2$ (§. 148. 2.)
folglich auch $K : k = A^2 : a^2 = (2A)^2 : (2a)^2$.

3) Sind die Kubikinhalte zweyer Prismen oder Zylinder einander gleich; so stehen ihre Grundflächen mit den Höhen in verkehrter Proportion.

Denn man setze oben in der Grundproportion $k = K$,
so verhält sich $K : K = G . H : g . h$,
daher ist $G . H = g . h$ (Rk. 265. 2.);
und folglich $G : g = h : H$
oder $H : h = g : G$ } Rk. 267.).

4) Aus dem gegebenen Kubikinhalte und aus der Höhe eines Prisma oder Zylinders kann man seine Grundfläche, und auch aus dem Kubikinhalte und aus der Grundfläche, die Höhe desselben bestimmen.

Denn aus $K = G . H$ findet man auch $G = \frac{K}{H}$, und $H = \frac{K}{G}$. Es sey z. B. der Kubikinhalt eines Zylinders $= 11$ k′ 1339 k″ $= 11\frac{1339}{1728}$ k′ $= 11,775$ k′ und die Höhe desselben $= 2° \; 3' = 15'$; so ist 11,775 k′ : 15′ $= 0,785\, q'$ = der Grundfläche. Setzt man nun den Halbmesser der Grundfläche dieses Zylinders $= x$;

so ist $x^2 . \pi = 0,785\, q'$
und $x^2 = \frac{0,785}{\pi}$
folglich $x = \sqrt{\frac{0,785}{3,14}} = 0,5 = \frac{1}{2}'$ = dem Halbmesser des Zylinders.

Fig.

§. 214.

Auch die Kubikinhalte der Pyramiden (und der Kegel) verhalten sich gegen einander, wie die Producte aus den Grundflächen mit ihren Höhen.

Denn es sey der Kubikinhalt von was immer für einer Pyramide oder eines Kegels $= K$, die Grundfläche $= G$, und die Höhe $= H$; der Kubikinhalt einer anderen Pyramide oder eines Kegels $= k$, die Grundfläche $= g$, und die Höhe $= h$;

so ist $K = G.\frac{1}{3}H$
und $k = g.\frac{1}{3}h$

daher $K:k = G.\frac{1}{3}H : g.\frac{1}{3}h = G.H : g.h$

Es folgt aus diesem:

1) Daß jede Pyramide dem dritten Theile eines Prisma, und auch jeder Kegel dem dritten Theile eines Zylinders von gleichen Grundflächen und Höhen gleich ist.

Um dieses einzusehen, darf man nur diese Proportion mit der im vorhergehenden Paragraphe vergleichen.

2) Daß Pyramiden oder Kegel von gleichen Grundflächen wie ihre Höhen, von gleichen Höhen aber wie ihre Grundflächen sich verhalten.

3) Daß Pyramiden oder Kegel einander gleich sind, wenn ihre Grundflächen mit den Höhen in verkehrter Proportion stehen.

4) Aus dem gegebenen Kubikinhalte einer Pyramide oder eines Kegels, und aus der Grundfläche kann man die Höhe: so wie aus dem Kubikinhalte und aus der Höhe, die Grundfläche bestimmen.

Alles dieses sieht man sehr leicht ein, wenn man hier eben so, wie im §. 213 verfährt.

§. 215.

Bey allen ähnlichen Körpern verhalten sich die Kubikinhalte so gegen einander, wie die Kubikzahlen (dritten Potenzen) ihrer gleichliegenden Abmessungen.

Man stelle sich zwey ähnliche Körper vor, z. B. zwey Pyra-

miden, die auf ähnlichen Grundflächen stehen, und von ähnlichen Fig.
Dreyecken eingeschlossen sind, und bezeichne den Kubikinhalt der ersten durch K, den Kubikinhalt der zweyten durch k; die drey Abmessungen oder Factoren, durch deren Multiplication der Kubikinhalt der ersteren Pyramide vorgestellt wird, bezeichne man mit A, B und H, die drey ähnlichen Abmessungen oder Factoren der zweyten Pyramide aber mit a, b und h;

so ist $K = A.B.H$

und $k = a.b.h$

also auch $K : k = ABH : abh$. Vermöge der vorausgesetzten Ähnlichkeit der zwey Körper verhält sich

$$\left.\begin{array}{l} A : a = B : b, \text{ daraus ist } b = \frac{aB}{A}, \\ \text{und } A : a = H : h, \text{ daraus ist } h = \frac{aH}{A} \end{array}\right\} \text{verm. §. 177. 2);}$$

setzt man diese Werthe für b und h in die vorhergehende Proportion; so verhält sich $K : k = A.B.H : a.\frac{a^2BH}{A^2} = A^3 : a^3$; und da auch $A : a = B : b = H : h$ oder $A^3 : a^3 = B^3 : b^3 = H^3 : h^3$ Statt findet; so verhält sich auch $K : k = B^3 : b^3 = H^3 : h^3$.

§. 216.

Nun wollen wir diesen Abschnitt von der Vergleichung und Verwandlung der Körper mit folgenden Aufgaben beschließen.

1. Aufgabe. Es ist die Seite eines Würfels gegeben, man soll die Seite eines andern Würfels finden, dessen Kubikinhalt sich zu dem gegebenen verhält, wie $m : n$. z. B. wie $2 : 1$.).

Auflösung. Man messe die gegebene Seite des Würfels auf einem genau ausgetheilten beliebigen Maßstabe. Es sey z. B. die Länge dieser Seite $= a = 5000$ Puncten nach dem Wiener-Schuhe, die unbekannte Seite des gesuchten Würfels aber sey $= x$; ferner sey der Kubikinhalt des gegebenen $= k$, und des gesuchten Würfels $= K$,

so verhält sich $K : k = m : n$ vermög Bedingung,

und $K : k = x^3 : a^3$ vermög §. 215;

folglich auch $m : n = x^3 : a^3$;

daraus findet man $x = a\sqrt[3]{\frac{m}{n}} = 5000\sqrt[3]{2} = 5000 . 1,25992 = 6299,6$ Puncten eben desselben Maßstabes. Man trage demnach auf eine gerade Linie diese gefundenen 6299,6 Puncte nach eben diesem Maßstabe auf; so ist diese Länge die Seite des gesuchten

Fig. Würfels, der am Kubikinhalte zweymahl so groß als der gegebene Würfel ist.

a) Die so eben gelöste Aufgabe von der Verdoppelung des Würfels ist die in den ältesten Zeiten bey den Mathematikern so berühmt gewesene delische Aufgabe, und hat denselben damahls viel Kopfbrechen verursachet, weil sie immer die unbekannte Seite des Würfels durch eine geometrische Verzeichnung zu bestimmen gesucht haben.

Wahrscheinlich mögen ihnen die Kunstgriffe der heutigen Rechenkunst, und der geometrische Maßstab noch nicht bekannt gewesen seyn, sonst hätten sie gewiß nicht so viel Mühe und Zeit auf die Erfindung der geometrischen Verzeichnungen verwendet; weil es eine ausgemachte Wahrheit ist, daß bey der Auflösung einer geometrischen Aufgabe die gesuchten Linien durch die Rechnung und mit Beyhülfe eines gut ausgetheilten Maßstabes in der Ausübung mit viel mehr Richtigkeit, als durch die geometrische Verzeichnung, besonders wenn diese nicht einfach, sondern sehr zusammengesetzt ist, bestimmt werden können.

2. Aufgabe. Einen Zylinder in einen Kegel von gleichem Kubikinhalte zu verwandeln, bey welchem die Grundflächen einander gleich sind.

Auflösung. Es sey die gleiche Grundfläche $= G$, die Höhe des Zylinders $= H$, und die zu suchende Höhe des Kegels $= x$; so ist der Kubikinhalt des Zylinders $= G.H$, vermöge §. 201
und „ „ „ Kegels $= G.\frac{1}{3}x$, vermöge §. 206

daher $G.\frac{1}{3}x = G.H$ laut Bedingung
oder $\frac{1}{3}x = H$ (Rk. 72. Grunds. I.)
folglich ist $x = 3H =$ der Höhe des Kegels.

3. Aufgabe. Den Durchmesser der Grundfläche eines Zylinders Z^{I} zu finden, der mit einem gegebenen Zylinder Z von einerley Höhe sey, aber doppelt so viel Flüssigkeit, z. B. Wasser als dieser enthalte.

Auflösung. Man errichte am Ende des gegebenen Durchmes-
130. sers AB eine Senkrechte BC, trage auf diese von B nach 1 eben diesen Durchmesser der Grundfläche des gegebenen Zylinders, man mache nämlich $B1 = AB$, und ziehe die Gerade $A1$; so ist diese dem gesuchten Durchmesser eines Zylinders gleich, der mit dem gegebenen einerley Höhe AB hat, aber doppelt so viel Flüssigkeit als dieser enthält, es ist nämlich $2Z = Z^{I}$.

Denn es ist $A1^2 = AB^2 + B1^2$

oder $A1^2 = 2AB^2$, weil $AB = B1$ gemacht wurde. Vermög §. 213. 2.) verhalten sich die Kubikinhalte der Zylinder von gleicher Höhe, wie die Quadrate ihrer Durchmesser; Fig. 130.

es ist nämlich $Z : Z^1 = AB^2 : A1^2$

oder $Z : Z^1 = AB^2 : 2AB^2$

oder $Z : Z^1 = \ \ 1 \ \ : 2$ (Nr. 268. VI.)

daher $Z^1 = 2Z$.

Will man einen Zylinder haben, der 3 Mahl so viel als der erste enthalte; so trage man die Hypothenuse $A1$ von B nach 2; so ist $A2$ der Durchmesser eines Zylinders, der mit dem gegebenen die gleiche Höhe AB, aber 3 Mahl so viel Kubikinhalt enthält.

Denn es ist $A1 = B2$ und $A1^2 = B2^2 = 2AB^2$ } vermög Construction, und des Obigen und Nr. 191. Grundſ. I.

ferner $A2^2 = AB^2 + B2^2$

und auch $A2^2 = AB^2 + 2AB^2 = 3AB^2$ (Nr. 40. Grundſ. II.)

Nun verhält sich:

$K : K^1 = AB^2 : A2^2$

oder $K : K^1 = AB^2 : 3AB^2$

oder $K : K^1 = \ \ 1 \ \ : 3$

} wenn man den Zylinder, dessen Durchmesser AB ist, mit K, und jenen, dessen Durchmesser $A2$ ist, mit K^1 bezeichnet.

folglich ist $K^1 = 3K$.

Und so erhält man den Durchmesser $A3$ eines Zylinders, der 4 Mahl so viel enthält als der erste, wenn man den Durchmesser $A2$ des vorigen 3fachen Zylinders von B nach 3 überträgt, und die Hypothenuse $A3$ zieht, u. s. w.

Ist demnach $B1$ der Durchmesser eines Gefäßes, welches 1 Eimer enthält;

so ist $B2 = A1$ der Durchmesser eines 2 eimerigen

und $B3 = A2$ „ „ „ 3 „

$B4 = A3$ „ „ „ 4 „ u. s. f.,

welche alle mit dem ersten einerley Höhe AB haben. Hierauf gründet sich die Verfertigung der im bürgerlichen Geschäftsverkehr gebräuchlichen Visirstäbe.

4. Aufgabe. Zu einem beliebigen Körper einen ähnlichen nach einem bekannten Verhältnisse zu verfertigen.

Auflösung. Es sey eine Seite des gegebenen Körpers $= a$, die gleichliegende Seite des gesuchten $= x$, und das gegebene Verhältniß wie $m : n$;

so verhält sich $m : n = a^3 : x^3$ (§. 215.)

folglich ist $x = a \sqrt[3]{\frac{n}{m}}$.

Fig. Wenn auf diese Art alle gleichliegenden Seiten gesucht werden, so sind die nöthigen Abmessungen des verlangten Körpers bestimmt.

Wäre anstatt des Verhältnisses der Kubikinhalte, schon eine Seite, z. B. $= S$, des zu suchenden ähnlichen Körpers gegeben; so findet man die übrigen gleichliegenden Seiten aus den Seiten A, B, C u. s. w. des gegebenen Körpers durch folgende Proportionen:

$$A : S = B : x; \text{ und } x = \frac{B \cdot S}{A}$$

$$\text{und } A : S = C : y; \text{ „ } y = \frac{C \cdot S}{A}$$

5. Aufgabe. Den Unterschied anzugeben, um welchen man einen parallel abgekürzten Kegel als Zylinder aus dem mittlern Durchmesser und seiner Länge zu klein berechnet.

Auflösung. Es sey der untere Durchmesser des abgekürzten Kegels $= D''$ der obere $= d''$ die Länge oder Höhe $= h'$ und sein Inhalt $= K$ Kubikschuh, so ist die untere Grundfläche $= \frac{D^2}{4} . \pi$, die obere $= \frac{d^2}{4} . \pi$ und die mittlere Proportionalfläche $= \sqrt{\frac{D^2 \pi . d^2 \pi}{4 . 4}} = \frac{D d \pi}{4}$; daher der Kubikinhalt des abgekürzten Kegels $K = (D^2 + d^2 + D d) \frac{h . \pi}{12 . 144}$, wenn man in §. 207 gehörig substituirt und reducirt. Ferner ist der Kubikinhalt desselben als Zylinder $= \left(\frac{D + d}{4}\right)^2 . \frac{h \pi}{144} = (D + d)^2 . \frac{h \pi}{16 . 144}$; folglich ist zwischen dem Kegel und Zylinder der

$$\text{Unterschied} = (D^2 + d^2 + D d) \frac{h \pi}{12 . 144} - (D + d) \frac{h \pi}{16 . 144}$$

$$= (D - d)^2 . \frac{h \pi}{4 . 1728} = (D - d)^2 . h . 0{,}00045,$$ wenn man gehörig reducirt. Dieser Unterschied wird um so größer, je länger der abgekürzte Kegel ist, und je mehr seine beyden Enddurchmesser verschieden sind. Man müßte also jedes Mahl zum Zylinder-Inhalt eines Baumstammes noch die Größe $(D - d)^2 . h . 0{,}00045$ addiren, um den wahren Inhalt des Kegelstückes zu erhalten. Übrigens lese man §. 209 unter 2).

Da jedoch die Durchmesser der Baumstücke in der Ausübung nur nach halben Zollen gemessen, und auch die Kubiktafeln in diesen Abmessungen (einige gar nur in ganzen Zollen) berechnet sind; so übersteigt der Unterschied des Kubikinhaltes, welcher aus dem um $\frac{1}{2}$ Zoll größern oder kleinern Durchmesser entsteht, jenen Unterschied um

Fig.

das 3fache, der sich aus der Zylinder-Berechnung ergibt. Es geben also, mit Beseitigung nutzloser Ängstlichkeit, die §. 209 aufgestellte Gleichung und darnach berechnete Kubiktafeln für die Ausübung im Großen zureichende Genauigkeit, da gewöhnlich der **mittlere** Durchmesser **unmittelbar** abgegriffen wird. In besonderen seltenen Fällen aber, kann zu der Zylinder-Berechnung der obige Unterschied leicht noch hinzu gezählt werden, oder, was practischer ist: man berechnet den Baumstamm nach §. 209. 1) und 2) in mehrern Stücken.

6. **Aufgabe.** In einem Forste *A* hat man 1700 Klaftern Holz aufgestellt, deren jede 6′ in der Länge, 6′ 3″ in der Höhe und 3′ in der Breite enthält. In einem andern Forste *B* werden die Holzklaftern gleichfalls 6′ lang, 6′ 3″ hoch, aber in der Breite, d. h. die Länge der Scheite nur zu 34″ aufgerichtet. Wie viel Klaftern müssen in diesem Forste aufgestellt werden, damit sie eben so viel Material enthalten, wie jene 1700 Klaftern?

§. 217.

Fleißige Anfänger sollen das Vergnügen haben, folgende Aufgaben selbst zu lösen.

1) Zur Aufführung (oder Ausbesserung) eines Dammes sind 80 Kubikklafter Erde erforderlich; der Platz, woraus diese zu nehmen wäre, darf nur 1′ tief ausgegraben werden; a) wie groß wird die Oberfläche des auszugrabenden Platzes seyn müssen; b) wie viel ist der Geldbetrag der Arbeit, wenn für eine Quadratklafter Fläche 4 kr., und für 1 Kubikklafter Erdarbeit 3 fl. 15 kr. zu bezahlen sind? (nach §. 199 zusammen 292 fl.)

2) Wie viel Fläche erfordern auf einer Holzlegstätte 3000 Klafter Scheitholz von 6′ lang und hoch, und 3′ Breite mit 2′ Zwischen- oder Lufträumen? ($3333 q^o = 2$ Joch $133\ q^o$).

3) Der untere Durchmesser (in Brusthöhe) eines Baumstammes ist $= 16''$, sein Kubikinhalt $= 56^{KI}$; der gleichnamige Durchmesser eines andern gleichhohen Stammes derselben Holz- und Bewirthschaftungsart ist $= 12\frac{1}{2}''$; wie groß ist dessen Kubikinhalt (nach §. 213 und 214 findet man 34,2 Kbfß.).

4) Ein kegelförmiger Baum (Fichte rc.) ist dem Kubikinhalte nach in drey solche Theile zu theilen, daß sich diese verhalten wie $1 : \frac{2}{3} : 2$; es sind die Punkte anzugeben, wo der Stamm senkrecht auf seine Achse durchgeschnitten werden soll? (nach §. 215.).

Fig. 5) Ein sehr thätiger Forstgehülfe findet von einem entwendeten Baumstamme nur das Gipfelstück von 3° Länge und 6″ Durchmesser; der Stockdurchmesser aber mißt 20″; wie lang war das entwendete Schaftstück, und von welchem Kubikinhalte? (nach §. 77 u. 209. 3.).

6) Derselbe fand, daß bey einem schon gefällten Baumstamme das Gipfelstück abhanden gekommen; das noch vorhandene Schaftstück hat am untern Durchmesser 4′, am obern 1′ und zur Länge 15°; wie lang war das Gipfelstück (als Kegel betrachtet), und von welchem Kubikinhalte? (nach §. 77. u. 206).

7) Derselbe fand auch in der Nähe einer Bretsäge einen Baumstamm entwendet; Verdacht und Spur zeigt gegen diesen Ort. An einem sogenannten Schwärtling, dessen dickes Ende genau auf den Stock des abhanden gekommenen Baumes paßte, fand er die Sehne 1,6′ und die Höhe des Bogens 2″; wie groß war der Durchmesser dieses Baumstammes? (nach §. 86. nahe 4′,006).

a) Aus der Höhe der in der Nähe des Stockes stehenden Stämme kann auf die Höhe des fraglichen Stammes und seinen Kubikinhalt geschlossen werden.

8) Welchen mittlern, in der Mitte unmittelbar abgegriffenen, Durchmesser muß ein Baumstück, in der abgekürzten Kegelform, haben, damit dasselbe bey einer Länge von 3′ genau 1 Kubikfuß enthalte? (nach §. 209. 2) nahe 7,8″).

9) Wenn um eine Kugel ein Zylinder und auch ein Kegel umschrieben werden, so sind beyde gleichseitig; welches Verhältniß haben die ganzen Oberflächen, und welches die Kubikinhalte dieser Körper? (nach §. 183 bis 188 die ganzen Oberflächen wie 4 : 6 : 9 und nach §. 200 bis 212 die Kubikinhalte wie 4 : 6 : 9) (Archimedes Grabmahl).

Viertes Hauptstück.

Von der geradlinigen Trigonometrie und Polygonometrie.

Erster Abschnitt.

Von der geradlinigen Trigonometrie.

I. Von den trigonometrischen Linien überhaupt.

§. 218.

Diejenige Wissenschaft, welche aus so viel bekannten Stücken, als zur Bestimmung einer geradlinigen Figur nöthig sind, die übrigen Stücke durch die Rechnung finden lehrt, heißt Goniometrie oder Winkelmeßkunde. Sie zerfällt in zwey Theile, in die Trigonometrie, welche nur Dreyecke, und in die Polygonometrie, welche alle mehrseitigen unregelmäßigen Vielecke zu ihrem Gegenstande hat. Die Wissenschaft also, aus drey gegebenen Stücken eines geradlinigen Dreyeckes, wodurch dasselbe nach §. 51 und 52 bestimmt ist, die übrigen Stücke durch Rechnung zu finden, wird die geradlinige oder ebene Trigonometrie genennt. Fig. 131.

a) Da auch Dreyecke auf der Oberfläche einer Kugel beschrieben werden können, deren Seiten Kreisbogen sind, und daher Kugeldreyecke (sphärische Dreyecke) heißen; so gibt es noch eine andere Art von Trigonometrie, welche von der Bestimmung und Berechnung dieser Dreyecke handelt, und daher die sphärische Trigonometrie genennt wird, deren Kenntniß für die höhere Meßkunst unentbehrlich, für unsern Zweck aber nicht unumgänglich nöthig, daher in die Grenzen dieses Lehrbuches nicht aufgenommen worden ist.

§. 219.

Fig. Jedes Dreyeck enthält (ohne die Fläche) sechs unterscheidbare Stücke, nämlich drey Seiten und drey Winkel. Aus drey gegebenen Stücken, worunter jedes Mahl wenigstens Eine Seite seyn muß, können die übrigen drey, entweder durch die Verzeichnung (geometrisch), oder durch die Rechnung (trigonometrisch) gefunden werden. Da aber die Seiten und Winkel eines Dreyeckes verschiedenartige Größen sind, so muß man sie dadurch vergleichbar machen, daß man für die Winkel solche Linien zu bestimmen trachtet, welche die Größe derselben und das Verhältniß zu den Seiten der Dreyecke zu erkennen geben, wenn jene Linien selbst einmahl bekannt sind.

Solche Größen, die von einander dergestalt abhängen, daß bei Änderung der einen Größe zugleich auch in der andern eine Veränderung vor sich gehet, nennt man überhaupt Functionen. Da nun bey Änderung der Winkel auch die erst erwähnten Linien ihr Verhältniß zu jenen ändern; so heißen daher diese Linien Functionen der Winkel oder trigonometrische Hülfslinien, deren Kenntniß aus dem Folgenden erhellet.

§. 220.

131. Wenn man aus der Spitze M eines Winkels AMP mit einem beliebigen Halbmesser MA einen Bogen AB beschreibt, und sodann aus dem Durchschnittspuncte B eines Schenkels MB die Senkrechte BC auf den andern Schenkel AM (oder auf dessen Verlängerung) fället; so heißt diese Senkrechte BC der Sinus (die Bogenhöhe) des Bogens AB, oder auch der Sinus des Winkels AMB: weil der Bogen AB die Größe des Winkels AMB bestimmt (§. 16.), und wird so bezeichnet: $BC = sin\ arc\ AB$ und ausgesprochen: BC ist gleich dem Sinus des Bogens *(arcus)* AB. Desgleichen ist $bc = sin\ AMb$, oder der Sinus des Bogens AGb. Verlängert man den Bogen BA, und auch die Senkrechte BC, bis sie jenen das zweyte Mahl in D schneidet;

so ist $BC = \frac{1}{2} BD$, und $BAD = 2\,AB$ vermög §. 39. 1.);
daher ist $\frac{1}{2} BD = sin\ arc\ AB$,
und $BD =$ der Sehne *(chorda)* des Bogens BAD,
es ist nämlich $BD = chord\ arc\ BAD$,
und $\frac{1}{2} BD = \frac{1}{2} chord\ arc\ BAD$ (Rk. 72. Grundſ. I.)
oder $\frac{1}{2} BD = \frac{1}{2}\ chord\ arc\ 2AB$, weil $BAD = 2AB$ ist;
folglich ist auch $sin\ arc\ AB = \frac{1}{2}\ chord\ arc\ 2AB$, das heißt: der

Sinus was immer für eines Bogens AB ist die halbe Sehne des doppelten Bogens $2AB$. Desgleichen ist für einen andern Bogen BG die Senkrechte $BF = sin\ arc\ BG$. Fig. 131.

Endlich heißt das Stück AC des Halbmessers zwischen dem Anfangspuncte A des Bogens AB, und seinem Sinus BC, der Quer-Sinus *(sinus versus)*.

Es ist nämlich $AC = sin\ vers\ AMB$ u. s. w.

§. 221.

Wenn man an dem Endpuncte A eines Halbmessers MA auf denselben eine Senkrechte AP errichtet, so berührt diese den Umkreis nur in dem Puncte A (§. 42. 1.). Verlängert man den andern Schenkel MB eines Winkels AMB, bis er die Berührungslinie AP in dem Puncte P schneidet; so heißt das abgeschnittene Stück AP die Tangente des Bogens AB oder des Winkels AMB, und wird so bezeichnet: $AP = tang\ arc\ AB$, oder $AP = tang\ AMB$; der verlängerte Halbmesser MB aber, nämlich MP wird die Secante eben dieses Bogens oder Winkels genennt, und geschrieben: $MP = sec\ arc\ AB$, oder $MP = sec\ AMB$. Desgleichen ist für einen andern Bogen BG die Senkrechte am Endpuncte des einen Schenkels,

nämlich $GH = tang\ arc\ BG$
und $MH = sec\ arc\ BG$, u. s. w.

§. 222.

1) Zwey Bogen oder Winkel, die einander entweder durch die Addition oder Subtraction auf 90° ergänzen, heißen Complements-Bogen oder Winkel. Wenn z. B. der Bogen GB zu dem Bogen BA, oder der Winkel GMH zu dem Winkel HMA addirt, 90° hervorbringt, so heißt der Bogen GB das Complement (die Ergänzung) des Bogens AB zu 90 Graden; und umgekehrt, der Bogen AB wird das Complement des Bogens BG genennt. Eben so wird der Bogen GB auch das Complement des Bogens BGE genennt, wenn GB von BGE abgezogen 90° hervorbringt, und umgekehrt.

2) Zwey Bogen oder Winkel, die einander entweder durch die Addition oder Subtraction auf 180° ergänzen, heißen Supplements-Bogen oder Winkel. Wenn z. B. die Bogen $AB + BGE = 180°$ sind, so ist AB der Supplements-Bogen von

Fig. 131. BGE und umgekehrt. Desgleichen, wenn die Bogen $AGEd - dE = 180°$ sind, so ist $AGEd$ das Supplement von Ed, und umgekehrt.

§. 223.

Der Sinus BF, die Tangente GH, und die Secante MH des Bogens GB, als des Complementes von AB, werden der Cosinus, die Cotangente und die Cosecante des Bogens AB genennt, und umgekehrt der Sinus BC, die Tangente AP, und die Sekante MP des Bogens AB, als das Complement von GB, heißen der Cosinus, die Cotangente, und die Cosecante des Bogens BG, und werden so bezeichnet:

$BC = cos\ arc\ BG$, $AP = cot\ arc\ BG$, und $MP = cosec\ arc\ BG$.

Desgleichen ist $cos\ arc\ AB = BF$, $cot\ arc\ AB = HG$, u. s. w.

Da nun $BF = cos\ arc\ AB$, und in dem Rechtecke $CBFM$ die Seite $BF = MC$ ist (§. 66.);

so ist auch $MC = cos\ arc\ AB$ (Rk. 40. Grundſ. III.).

Eben so ist $MF = cos\ arc\ BG$, das heißt: der Cosinus eines Bogens ist das Stück des Halbmessers zwischen dem Durchschnitte des Sinus und dem Mittelpuncte des Bogens. Man erhält also durch die Bestimmung des Sinus eines Winkels zugleich auch seinen Cosinus.

§. 224.

So wie die kurze Bezeichnung $sin\ arc\ AB = BC$, und $cos\ arc\ AB = CM$ gelesen wird: der Sinus des Bogens AB ist gleich BC, und der Cosinus des Bogens AB ist gleich CM; so wird auch durch $AB = arc\ sin\ BC$, und $AB = arc\ cos\ CM$ bezeichnet, daß zu dem Sinus BC der Bogen AB, und zu dem Cosinus CM ebenfalls der Bogen AB gehöret.

Desgleichen, da $tang\ arc\ AB = AP$, und $HG = cot\ arc\ AB$ ist; so ist auch $AB = arc\ tang\ AP$; $arc\ cot\ HG = AB$, u. s. w.

Diese Linien: Sinuse, Cosinuse, Tangenten, Cotangenten, Secanten u. s. w., oder ihre Logarithmen, wenn man sich diese Linien auf einem Maßstabe gemessen, und ihre Theile in Zahlen ausgedrückt vorstellet, sind es, welche man trigonometrische Functionen oder Hülfslinien nennt. Der Kürze wegen kann man die trigonometrischen Functionen der Complements-Winkel,

Cofunctionen derjenigen Winkel nennen, auf welche sich die Complements-Winkel beziehen. So z. B. ist CM eine Cofunction des Winkels AMB, oder des Bogens AB, aber eine Function des Bogens BG; eben so ist AP eine Function des Bogens AB, aber eine Cofunction des Bogens BG u. s. w. Fig. 131.

II. Bestimmung der Größe und Lage der trigonometrischen Linien.

§. 225.

Die Sinuse wachsen von Null Grad bis 90°, von da an aber nehmen sie bis 180° wieder ab; so daß $\sin 0° = 0$, der $\sin 90°$ = dem Halbmesser, und $\sin 180° = 0$ ist.

1) Man denke sich den Schenkel BM des Winkels BMA dergestalt herab bewegt, daß derselbe mit dem andern Schenkel AM überein fällt, das ist, bis der Winkel $AMB = 0$ wird; so wird auch der Sinus BC in Null übergehen; es wird nämlich seyn $\sin 0° = 0$. Bewegt sich aber der Schenkel MB weiter aufwärts gegen G, so wird der Sinus BC immer größer; und wenn der Schenkel MB mit GM überein fällt, und der Bogen AG oder der Winkel $AMG = 90°$ wird, so ist der Sinus am größten, und dem Halbmesser MG gleich. Bewegt sich der Schenkel MG über 90° in den zweyten Quadranten hinüber, so werden die Sinuse immer kleiner, bis endlich der Sinus von 180° wieder $= 0$ wird.

a) Man nennt den Sinus eines Bogens von 90°, weil er dem Halbmesser gleich und folglich der größte Sinus ist, gewöhnlich *sinus totus* (den ganzen Sinus), man kann ihn deswegen als Einheit annehmen, und alle übrige Sinuse in Theilen desselben berechnen. In der Folge werden wir den *sin. tot.* zuweilen mit r, öfters aber auch mit 1 bezeichnen.

2) Vermög §. 220 ist BC der Sinus, sowohl des spitzigen Winkels AMB als auch des stumpfen BME; dasselbe gilt von den Winkeln AMb und bME, und da jene zwey Winkel, so wie diese als Nebenwinkel zusammen 180° betragen; so folgt, daß zwey Supplementswinkel, die sich durch die Addition auf 180° ergänzen, einen und denselben Sinus haben.

Fig. 131. 3) Bewegt sich der Schenkel ME über 180° in den dritten Quadranten hinüber, etwa in die Lage Md, so ist die Senkrechte dc der Sinus des Bogens Ed oder des spitzigen Winkels EMd, und zugleich auch der Sinus des Bogens $AGEd$ oder des stumpfen Winkels $AMG + GMd$. Zieht man den Bogen Ed von $AGEd$ ab, so ist $AGEd - Ed = 180°$; es haben also auch zwey Supplementswinkel, die sich durch die Subtraction auf 180° ergänzen, einen und denselben Sinus.

4) Vergleicht man die Lage und Richtung der Sinuse im dritten und vierten Quadranten, mit jener im ersten und zweyten, so zeigt sich, daß sie einander gerade entgegengesetzt sind. Bezeichnet man die Lage der Sinuse im ersten und zweyten Quadranten durch +, so erhält die Lage der Sinuse im dritten und vierten die Bezeichnung — (Nr. 141.). Da also die Sinuse sowohl der spitzigen, als der stumpfen Winkel im ersten und zweyten Quadranten weder durch ihre Lage, noch durch ihre Größe verschieden sind; so müssen in der Folge andere Umstände entscheiden, ob zu einem gegebenen oder durch die Rechnung gefundenen Sinus ein Winkel unter oder über 90°, d. i. ein spitziger oder stumpfer Winkel gehöre.

b) Da die Sinuse in demselben Augenblicke die entgegengesetzte Lage annehmen, als ein Schenkel eines Winkels den Durchmesser AE überschreitet, so kann jeder Durchmesser als die Grenze und gleichsam als der Nullpunct angesehen werden, den ein Schenkel eines Winkels passiren muß, um in das Gebieth der negativen Sinuse zu kommen. Daß übrigens ein negativer Sinus ba eben so groß als ein possitiver dc ist (Fig. 136.), wenn die dazu gehörigen Winkel einander gleich sind, wie $dmc = bma$, oder Supplementsbogen sind, wie $AGEd - Ed = AGE$ (Fig. 131), darf nach den vorigen, und den in der Nr. 140 aufgestellten Begriffen, wohl kaum mehr erinnert werden.

§. 226.

Die Cosinuse nehmen von 0° bis 90° ab, von da an aber wachsen sie wieder bis 180°; so zwar, daß $\cos 0° = r =$ dem Halbmesser AM, dann $\cos 90° = 0$, und $\cos 180° = r =$ dem Halbmesser ME ist.

1) Denkt man sich den Schenkel BM gegen den andern MA herab bewegt, so wird der Cosinus MC immer größer, bis er endlich dem Halbmesser MA selbst gleich, d. i. $\cos 0° = r$ wird,

wenn der Punct B mit A überein fällt, und also der Bogen $BA = 0°$ ist. Hingegen wird der Cosinus CM immer kleiner, je mehr sich die Gerade BM aufwärts gegen G bewegt, bis er endlich ganz verschwindet, wenn der Durchschnitt C des Sinus, mit dem Scheitel M des Winkels, d. i. der Schenkel BM aber mit MG überein fällt, und also der Bogen $AB = AG = 90°$; folglich $\cos 90° = 0$ wird. Bewegt sich der Schenkel MG über 90° in den zweyten Quadranten hinüber, so wird der Cosinus Mc immer größer, bis er endlich bey dem Bogen $AGE = 180°$ wieder dem Halbmesser, d. i. $\cos 180° = r$ wird. Fig. 131.

2) Da CM der Cosinus des Bogens AB und auch des Bogens EGB; so wie Mc der Cosinus des Bogens AGb und zugleich auch des Bogens bE ist (§. 223.), so folgt, daß zwey Supplementswinkel, die sich durch die Addition auf 180° ergänzen, denselben Cosinus haben. Die Lage der Cosinuse aber im 1ten und 2ten Quadranten ist gerade entgegengesetzt; denn das Wachsthum des Cosinus MC im 1ten Quadranten geht vom Scheitel M aus links, während dasselbe im 2ten Quadranten von demselben Puncte M rechts ausgeht.

Bezeichnet man demnach die Lage der Cosinuse im 1ten Quadranten mit $+$, so wird durch $-$ die Lage derselben im 2ten Quadranten bezeichnet. Hierdurch wird also bestimmt, daß zu einem gegebenen positiven Cosinus ein Winkel oder Bogen unter, zu einem negativen Cosinus aber ein Winkel über 90° gehört.

3) Daß Winkel oder Bogen, die sich durch die Subtraction auf 180° ergänzen, gleichen Cosinus haben, wie auch, daß die Cosinuse im 1ten und 4ten Quadranten die positive, im 2ten und 3ten aber die negative Lage haben, erhellet deutlich aus dem bisher gesagten und der Figur selbst.

§. 227.

Die Tangenten wachsen von 0° bis 90°, von da an aber nehmen sie bis 180° wieder ab; so daß $\tan 0° = 0$, die $\tan 90° = \infty$, und $\tan 180° = 0$ ist.

1) Denn die Tangente AP wird immer kleiner, je kleiner der Bogen AB wird; verschwindet aber gänzlich, wenn dieser Bogen $AB = 0$ wird; es ist also $\tan 0° = 0$. Der Durchschnittspunct P der Tangente AP rückt aber immer weiter hinaus, je mehr der Bogen AP zunimmt. Geht endlich, bey der fortgesetzten Bewegung des Schenkels PM, der Bogen AB in $AG = 90°$ über;

Fig. 131. so ist der Winkel $CMG = 90°$, es läuft also MG mit AP parallel (§. 37. 3.); folglich wird die Tangente von der Secante nun nicht mehr geschnitten, daher ist $tang\ 90° = \infty$. Bewegt sich der Schenkel MG über 90° in den 2ten Quadranten, so kann auf dieser Seite um so weniger ein Durchschnitt Statt finden, da sich die Secante von der Tangente immer mehr entfernt. Verlängert man aber beyde auf der entgegengesetzten Seite, so durchschneiden sie sich in Q, und es ist AQ die Tangente des stumpfen Winkels AMI; diese Tangente verschwindet aber, wenn die Gerade NQ mit AE überein fällt, wenn nämlich der Bogen $AGE = 180°$ ist; es ist also $tang\ 180° = 0$.

2) Wegen der Gleichheit der Dreyecke MAQ und MEN (§. 23. 2.) ist $AQ = EN$. Nun aber ist AQ die Tangente des stumpfen Winkels AMN, die Gerade EN aber die Tangente des spitzigen Winkels EMN, die zusammen 180° betragen. Also haben zwey Supplements-Winkel, die sich durch die Addition auf 180° ergänzen, gleiche Tangenten; nur ist die Lage der Tangente eines Winkels oder Bogens über 90° negativ, wenn man die entgegengesetzte Lage eines Winkels unter 90° positiv bezeichnet. Es gibt also auch hier wieder die Bezeichnung einer Tangente durch + oder — zu erkennen, daß der erstern ein spitziger, der letztern aber ein stumpfer Winkel entspreche.

§. 228.

Die Cotangenten nehmen von 0° bis 90° ab, von da an aber wachsen sie bis 180°; so daß $cot\ 0° = \infty$, die $cot\ 90° = 0$, und $cot\ 180° = \infty$ ist.

1) Denn fällt der Schenkel MH mit MA überein, so ist der Bogen $AB = 0$, und es läuft AM mit GH parallel, also ist $cot\ 0° = \infty$. Mit dem Wachsthume des Bogens AB rückt der Durchschnitt H der Cotangente und Cosecante immer mehr gegen den Anfangspunct G der Cotangente zu, und fällt endlich mit diesem Puncte gänzlich überein, wenn der Winkel $AMG = 90°$ ist; es ist also $cot\ 90° = 0$. Bewegt sich der Schenkel MG über 90° in den 2ten Quadranten hinüber, so entfernt sich auf der entgegengesetzten Seite der Durchschnitt I der Cotangente und Cosecante immer mehr von dem Anfangspuncte G; kommt endlich die Cosecante MI in die Lage ME, so läuft ME mit GI parallel; folglich ist $cot\ 180° = \infty$.

2) Wegen der Gleichheit der Winkel $x = y$ ist der Bogen

$AD = Eb$; und wegen der Gleichheit der Dreyecke MLK und MGI ist $GI = LK$. Nun ist GI die Cotangente des stumpfen Winkels AMI, die Gerade LK aber die Cotangente des spitzigen Winkels $x = y$, der mit erstern 180° beträgt; folglich haben zwey Supplements-Winkel auch gleiche Cotangenten; nur ist ihre Lage entgegengesetzt, es gehört nämlich zu einem stumpfen Winkel AMI eine negative Cotangente $- GI$, wenn die Lage der Cotangente $+ LK$ eines spitzigen Winkels $x = y$ positiv bezeichnet wird. Fig. 131.

a) Nun könnte man leicht, wenn es für unsern Zweck nöthig wäre, auch die Größe und Lage der Tangenten und Cotangenten im 3ten und 4ten Quadranten auf eine ähnliche Weise untersuchen.

Die Größe und Lage der Secanten und Cosecanten kann schon aus der Untersuchung der Tangenten und Cotangenten gefolgert werden, da sie aber als ganz entbehrlich in den logarithmisch-trigonometrischen Tafeln nicht berechnet vorkommen, so wollen wir sie in dem folgenden §. nur übersichtlich noch erwähnen.

§. 229.

Alles dieses läßt sich nun sehr kurz also zusammen fassen: Ist nämlich der Winkel $AMB = 0$, oder der Schenkel MB fällt mit AM zusammen; so wird der Sinus und die Tangente $= 0$, der Cosinus und die Secante $= r$, die Cotangente und Cosecante aber $= \infty$. Mit dem Winkel wachsen auch die Functionen, d. i. der Sinus, die Tangente und die Secante; die Cofunctionen hingegen, nämlich der Cosinus, die Cotangente, und die Cosecante nehmen ab, bis derselbe ein rechter Winkel oder $= 90°$ wird, wo der Sinus und die Cosecante $= r = sin.\ tot. =$ dem Halbmesser, der Cosinus und die Cotangente $= 0$, die Tangente und Secante $= \infty$ wird. Fährt der Winkel fort zu wachsen, und immer mehr und mehr stumpf zu werden, so nehmen jetzt die Functionen ab; dagegen aber die Cofunctionen zu, und es ist bc der Sinus, AQ die Tangente, MQ die Secante, MC der Cosinus, GI die die Cotangente, und MI die Cosecante. Der Sinus allein hat noch seine nämliche Lage gegen den Durchmesser AE, die er hatte, als der Winkel noch spitzig war; die übrigen trigonometrischen Linien aber haben alle die entgegengesetzte Lage angenommen. Wenn endlich der Winkel $= 180°$ wird, so wird der Sinus und die Tangente wieder $= 0$, der Cosinus und die Secante $= r$, die Cotangente und Cosecante aber $= \infty$, u. s. w.

Fig. 131. Aus der folgenden Tabelle ist die Lage und Größe der trigonometrischen Linien durch alle vier Quadranten des Kreises zu ersehen, wobey a den Bogen oder Winkel, r aber den Halbmesser bezeichnet; es ist nämlich

für a = 0°	= 90°	= 180°	= 270″	= 360°
$\sin a = +0$	$= +r$	$= +0$	$= -r$	$= -0$
$\tan g\ a = +0$	$= +\infty$	$= -0$	$= +\infty$	$= -0$
$\sec a = +r$	$= +\infty$	$= -r$	$= -\infty$	$= +r$
$\cos a = +r$	$= +0$	$= -r$	$= -0$	$= +r$
$\cot a = +\infty$	$= +0$	$= -\infty$	$= +0$	$= +\infty$
$\operatorname{cosec} a = +\infty$	$= +r$	$= -\infty$	$= -r$	$= -\infty$

III. Von den zur Berechnung der trigonometrischen Linien nöthigen Formeln, und von dem Gebrauche der trigonometrischen Tafeln.

A. Von den hierzu nöthigen Formeln.

§. 230.

Setzt man den Bogen $AB = a$, und den dazu gehörigen Halbmesser $AM = BM = MG = r$; so ist $BC = \sin a$, und $CM = \cos a$.

Im rechtwinkeligen Dreyecke BCM ist

$$\left.\begin{aligned} BM^2 &= BC^2 + CM^2 \\ \text{daher auch } BC &= \sqrt{(BM^2 - CM^2)} \\ \text{und } CM &= \sqrt{(BM^2 - BC^2)} \end{aligned}\right\} \text{vermöge §. 89.;}$$

folglich ist auch

$$\text{I.} \left\{\begin{aligned} r^2 &= \sin^2 a + \cos^2 a\ ^{*)}, \text{ daraus folgt} \\ \sin a &= \sqrt{(r^2 - \cos^2 a)}, \text{ und} \\ \cos a &= \sqrt{(r^2 - \sin^2 a)}. \end{aligned}\right.$$

---

*) Es ist gewöhnlich, daß man was immer für eine Potenz m einer trigonometrischen Function, z. B. $\sin a$ durch $\sin^m a$ bezeichnet, anstatt daß man sie eigentlich durch $(\sin a)^m$ bezeichnen sollte.

Auch haben Anfänger darauf zu achten, daß sie z. B. die Ausdrücke:

Ferner verhält sich in den ähnlichen Dreyecken MCB und MAP Fig. 131.

$MC : CB = MA : AP$;

nämlich $\cos a : \sin a = r : \operatorname{tang} a$; und folglich ist

$$\text{II.} \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tang} a = \frac{r \cdot \sin a}{\cos a} \\ \sin a = \frac{\cos a \cdot \operatorname{tang} a}{r}, \text{ und} \\ \cos a = \frac{r \cdot \sin a}{\operatorname{tang} a} \end{array} \right.$$

Eben so verhält sich in den ähnlichen Dreyecken MFB und MGH

$MF : FB = MG : GH$

oder $BC : MB = MG : GH$, weil $MF = BC$ und $FB = MC$ ist, nämlich $\sin a : \cos a = r : \cot a$; folglich ist

$$\text{III.} \left\{ \begin{array}{l} \cot a = \frac{r \cdot \cos a}{\sin a} \\ \cos a = \frac{\sin a \cdot \cot a}{r}, \text{ und} \\ \sin a = \frac{r \cdot \cos a}{\cot a} \end{array} \right.$$

Endlich verhält sich in den ähnlichen Dreyecken MCB und MAP

$MC : MB = MA : MP$, das ist, $\cos a : r = r : \sec a$;

und in den ähnlichen Dreyecken MFB und MGH verhält sich (MF oder CB) $: MB = MG : MH$, nämlich $\sin a : r = r : \operatorname{cosec} a$; folglich ist

$$\text{IV.} \left\{ \begin{array}{l} \sec a = \frac{r^2}{\cos a}, \text{ und} \\ \operatorname{cosec} a = \frac{r^2}{\sin a}, \text{ u. s. w.} \end{array} \right.$$

Aus den von I. bis IV. entwickelten Grund-Formeln können noch sehr viele andere hergeleitet werden, wenn man sie mit einander verbindet, das ist, wenn man z. B. den Werth von $\cos a$

$2 \sin d$ mit $\sin 2d$, oder $\frac{1}{3} \sin d$ mit $\sin \frac{1}{3} d$, u. s. w. nicht verwechseln. Denn wenn z. B. unter d der Bogen ba in Fig. 132 begriffen wird; so stellet der Ausdruck $2 \sin d$ den doppelten Sinus des Bogens ba, nämlich die Sehne bm vor; während der Ausdruck $\sin 2d$ den Sinus des doppelten Bogens, das ist, die Gerade cf vorstellet, die doch überzeugend von bm in der Größe verschieden ist, wenn der Bogen $cb = ba$ gemacht wird u. s. w.

Fig. 131. oder *sin a* aus einer oder der andern Formel in alle übrige substituirt z. B.

da in der Formel II. $sin\ a = \frac{cos\ a\ .\ tang\ a}{r}$

und in der Formel III. $sin\ a = \frac{r\ .\ cos\ a}{cot\ a}$ gefunden worden;

so ist auch $\frac{r\ .\ cos\ a}{cot\ a} = \frac{cos\ a\ .\ tang\ a}{r}$, es ist nämlich

$$\text{V.}\left\{\begin{array}{l} tang\ a\ .\ cot\ a = r^2, \text{ und} \\ tang\ a = \frac{r^2}{cot\ a}, \text{ endlich} \\ cot\ a = \frac{r^2}{tang\ a} \end{array}\right.$$

u. s. w.

§. 231.

Der Sinus von 45° ist dem Cosinus von 45° gleich.

Denn es sey der Winkel $BMC = 45°$, so ist auch $CBM = 45°$ vermög §. 53. 2.;

daher ist $MC = CB$ (§. 56. 1.)

und $BM = \sqrt{(BC^2 + CM^2)} = \sqrt{(CM^2 + CM^2)} = \sqrt{2CM^2} = CM\sqrt{2}$

oder $r = CM\sqrt{2}$; daraus findet man

$$CM = \frac{r}{\sqrt{2}} = \frac{r.\sqrt{2}}{\sqrt{2}.\sqrt{2}} = \frac{r\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = \frac{r\sqrt{2}}{2} = \frac{r}{2}\sqrt{2}.$$

es ist nämlich $sin\ 45°$ und $cos\ 45° = \frac{r}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{2}\ chord\ 90°$ = der halben Seite eines eingeschriebenen Quadrates.

Eben so leicht kann auch gezeigt werden, daß $tang\ 45° = cot\ 45° = r$ = dem Halbmesser = *sin. tot.* ist.

§. 232.

Da $sin\ arc\ AB = BC = FM = cos\ arc\ BG$

und $arc\ BG = arc\ ABG - arc\ AB = arc\ (90-AB)$ ist,

so ist auch $sin\ arc\ AB = cos\ arc\ (90-AB)$ verm. Rk. 40 II.

Desgleichen ist $cos\ arc\ AB = sin\ arc\ (90-AB)$.

Setzt man der Kürze wegen den Bogen $AB = a$;

so ist $sin\ a = cos\ (90-a)$

und $cos\ a = sin\ (90-a)$, das heißt: Der Sinus eines beliebigen spitzigen Winkels ist gleich dem Cosinus

seines Complements-Winkels; und der Cosinus eines Winkels oder Bogens unter 90° ist dem Sinus seines Complements-Bogens gleich. Man sieht hieraus, daß es nur nöthig ist, die Sinus und Cosinus bis 45° zu berechnen; um auch die Sinus und Cosinus bis 90° zu haben. Denn ist z. B. einmahl *sin* 10° und auch *cos* 10° gefunden, so ist auch zugleich *cos* 80 und *sin* 80° ohne weitere Rechnung bekannt; Fig. 131.

weil $cos\ 80° = sin\ (90°—80°) = sin\ 10°$,
und $sin\ 80° = cos\ (90°—80°) = cos\ 10°$ ist.

Desgleichen, da $tang\ arc\ AB = AP = cot\ arc\ BG$
und $arc\ BG = arc\ (90°—AB)$ ist;
so ist auch $tang\ AB = cot\ (90—AB)$,
} weil $arc\ BG = arc\ (90—AB)$ ist,

oder $tang\ a = cot\ (90—a)$, wenn man den Bogen $AB = a$ substituirt.

Aus eben diesem Grunde ist $cot\ a = tang\ (90—a)$; nämlich die Tangente was immer für eines Winkels unter 90° ist der Cotangente seines Complements-Winkels gleich; und die Cotangente eines spitzigen Winkels ist gleich der Tangente seines Complements-Winkels. Sind einmahl die Sinuse und Cosinuse gefunden, so ergeben sich die Tangenten und Cotangenten sehr leicht nach den Formeln **II.** und **III.** in §. 230.

Ehe wir jedoch den Anfängern einen beyläufigen Begriff beybringen können, wie man bey Berechnung der trigonometrischen Functionen vorging, müssen auch für den spätern Gebrauch, noch folgende Formeln entwickelt werden.

§. 233.

Aufgabe. Aus den gegebenen Sinus und Cosinus zweyer Bogen oder Winkel, sowohl den Sinus und Cosinus der Summe, als auch der Differenz dieser zwey Bogen oder Winkel zu finden.

Auflösung. Es sey der Bogen $AC = a$, der Bogen $CD = CB = b$, und der Halbmesser $AM = MC = r$, 132.

so ist $arc\ AD = arc\ AC + arc\ CD = a + b$
und $arc\ AB = arc\ AC — arc\ CB = a — b$,

$CG = sin\ a$, und $GM = cos\ a$,
$Dn = sin\ b$, und $nM = cos\ b$,
$DE = sin\ (a+b)$, und $EM = cos\ (a+b)$,
$BH = sin\ (a—b)$, und $HM = cos\ (a—b)$.

Fig. 132. Nun ist das rechtwinkelige Dreyeck $nFM \sim nID$ vermög §. 61. 1)
so wie das Dreyeck $nFM \sim CGM$ „ §. 65. 1)
daher ist auch $nID \sim CGM$, und es finden zur Bestimmung der Stücke EI, DI, FM, und nI folgende Proportionen Statt; nämlich in den Dreyecken MCG und MnF verhält sich

$$MC : CG = Mn : nF$$

oder $MC : CG = Mn : IE$; weil $nF = IE$ ist;

folglich ist $IE = \frac{CG.Mn}{MC} = \frac{\sin a . \cos b}{r}$.

In den Dreyecken MCG und DnI verhält sich ferner

$$MC : MG = Dn : DI,$$

oder $r : \cos a = \sin b : DI$; folglich ist $DI = \frac{\sin b . \cos a}{r}$.

Nun aber ist $EI + ID = DE$; folglich auch

$DE = \frac{\sin a . \cos b}{r} + \frac{\sin b . \cos a}{r}$, nämlich es ist

1) $\sin (a+b) = (\sin a . \cos b + \sin b . \cos a) : r$.

Da vermög (§. 61. 2) das Dreyeck $Bnt \sim nID$, und über dieses die Seite $Bn = nD$ ist (§. 39.), so decken sich diese Dreyecke (§. 59.); folglich ist $DI = nt = IK$.

Es ist daher $IE - IK = KE = BH$, oder

$BH = EI - DI = \frac{\sin a . \cos b}{r} - \frac{\sin b . \cos a}{r}$, es ist nämlich

2) $\sin (a-b) = (\sin a . \cos b - \sin b . \cos a) : r$.

Ferner verhält sich in den Dreyecken MCG und MnF

$$MC : MG = Mn : MF$$

oder $r : \cos a = \cos b : MF$; folglich ist $MF = \frac{\cos a . \cos b}{r}$.

Auch verhält sich in den Dreyecken MCG und DnI

$$MC : CG = Dn : nI,$$

oder $r : \sin a = \sin b : nI$; folglich ist $nI = \frac{\sin a . \sin b}{r}$.

Nun ist $nI = FE$, und $EM = MF - FE$; folglich ist

$EM = MF - nI = \frac{\cos a . \cos b}{r} - \frac{\sin a . \sin b}{r}$, es ist nämlich

3) $\cos (a+b) = (\cos a . \cos b - \sin a . \sin b) : r$.

Endlich ist $MF + FH = HM$, oder weil $nI = Bt = HF$ ist;

so ist auch $HM = FM + nI = \frac{\cos a \,.\, \cos b}{r} + \frac{\sin a \,.\, \sin b}{r}$; es ist folglich Fig. 132.

4) $\cos(a - b) = (\cos a \,.\, \cos b + \sin a \,.\, \sin b) : r$.

Diese aufgestellten vier Gleichungen lassen sich nun in folgende zwey zusammen fassen;

I. $\sin(a \pm b) = (\sin a \,.\, \cos b \pm \sin b \,.\, \cos a) : r$

II. $\cos(a \pm b) = (\cos a \,.\, \cos b \mp \sin a \,.\, \sin b) : r$.

§. 234.

Setzt man nun in die Formel I. §. 233 für $b = a$, das ist, die Bogen CD und AC einander gleich, so erhält man für den Sinus und Cosinus des doppelten Bogens nachstehende zwey Formeln:

$\sin(a + a) = (\sin a \,.\, \cos a) + \sin a \,.\, \cos a) : r$, es ist nämlich

1) $\sin 2a = \frac{2 \,.\, \sin a \,.\, \cos a}{r}$, daraus folgt auch

$\sin a \,.\, \cos a = \frac{1}{2} r \,.\, \sin 2a$.

Eben so findet man in (§. 233.) nach der Formel II.

$\cos(a + a) = (\cos a \,.\, \cos a - \sin a \,.\, \sin a) : r$, nämlich es ist

2) $\cos 2a = (\cos^2 a - \sin^2 a) : r$, und wenn man für $\sin^2 a$ seinen Werth $r^2 - \cos^2 a$ aus (§. 230. I.) setzt, so ist

$\cos 2a = [\cos^2 a - (r^2 - \cos^2 a)] : r = (\cos^2 a - r^2 + \cos^2 a) : r$,

es ist nämlich $\cos 2a = \left(\frac{2 \,.\, \cos^2 a - r^2}{r}\right)$, daraus folgt auch

$2 \cos^2 a - r^2 = r \,.\, \cos 2a$, oder $\cos^2 a = \frac{r^2 + r \,.\, \cos 2a}{2}$, und endlich

$\cos a = \sqrt{\left(\frac{r^2 + r \,.\, \cos 2a}{2}\right)}$.

Setzt man in diese letzte Formel für $2a = c$, daher für $a = \frac{1}{2} c$, so findet man

3) $\cos \frac{1}{2} c = \sqrt{\left(\frac{r^2 + r \,.\, \cos c}{2}\right)}$, daraus folgt

$\cos^2 \frac{1}{2} c = \frac{r^2 + r \,.\, \cos c}{2}$, (Rk. 191. I. und 219); daher ist

4) $\cos c = \frac{2 \,.\, \cos^2 \frac{1}{2} c - r^2}{r}$.

Fig. 132. Endlich erhält man, wenn in dieser letztern Formel 4) für $\cos^2 \frac{1}{2} c$ sein Werth $r^2 - \sin^2 \frac{1}{2} c$ aus (§. 230. I.) substituirt wird,

5) $\cos c = \frac{2(r^2 - \sin^2 \frac{1}{2} c) - r^2}{r} = \frac{r^2 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} c}{r}$ daraus folgt

6) $\sin \frac{1}{2} c = \sqrt{\left(\frac{r^2 - r \cdot \cos c}{2}\right)}$.

B. Von der Berechnung der trigonometrischen Linien.

§. 235.

Nun sind wir im Stande einzusehen, wie man für einen angenommenen Halbmesser die Sinuse und Cosinuse aller Bogen von 0° bis 90° etwa von Minute zu Minute habe berechnen können. Man hat nämlich bey dieser Berechnung den Halbmesser $r = 10\,000\,000000 = \sin.\ tot. = \sin 90°$ gesetzt, um die übrigen Sinuse und Cosinuse in solchen Theilen zu bestimmen, deren der Halbmesser oder *sin. tot.* zehntausend Millionen enthält. Daraus folgt

1) $\sin 30° = 5000\,000000 = \frac{1}{2} r$.

Denn es ist $chord\ 60° = r$ (§. 73.)

also $\frac{1}{2} chord\ 60° = \frac{1}{2} r$ (Rk. 72. Grundsatz I.).

Nun aber ist $\frac{1}{2} chord\ 60° = \sin 30°$ vermög §. 220;

folglich ist auch $\sin 30° = \frac{1}{2} r$.

Sodann ist $\cos 30° = \frac{1}{2} r \sqrt{3}$; weil verm. §. 230. I. $\cos 30° = \sqrt{(r^2 - \sin^2 30°)} = \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4} r^2)} = \sqrt{\frac{3}{4}} . r^2 = \frac{r}{2} \sqrt{3}$ ist.

Die Größe $\frac{1}{2} r \sqrt{3}$ ist zugleich der $\sin 60°$; nämlich es ist $\sin 60° = \cos 30° = \frac{1}{2} r \sqrt{3}$.

und $\cos 60° = \frac{1}{2} r$, weil 30 u. 60 einander zu 90 ergänzen (§. 232).

2) Ferner ist $\sin 18° = \frac{r}{4} (-1 + \sqrt{5})$. Denn es ist $\sin 18° = \frac{1}{2} chord\ 36°$ = der halben Seite eines regelmäßigen Zehneckes, weil die Seite des regelmäßigen Zehneckes einen Bogen von 36° abschneidet. Es ist aber vermög §. 101. 1) die Seite eines regelmäßigen Zehneckes $= \frac{r}{2} (-1 + \sqrt{5})$, wenn man den Halbmesser $= r$ und daselbst gehörig substituirt.

Es ist nämlich $chord\ 36° = \frac{r}{2} (-1 + \sqrt{5})$,

und $\frac{1}{2} chord\ 36° = \frac{r}{4} (-1 + \sqrt{5})$,

und auch $\frac{1}{2} chord\ 36° = \sin 18°$;

folglich ist $\sin 18° = \frac{r}{4} (-1 + \sqrt{5}) = \cos 72°$ (§. 232).

Daraus findet man $\cos 18° = \frac{r}{4} . \sqrt{(10 + 2\sqrt{5})} = \sin 72°$.

Denn es ist $cos\,18° = \sqrt{(r^2 - sin^2\,18°)} = \sqrt{[r^2 - \frac{r^2}{16}(-1+\sqrt{5})^2]}$ Fig.
$= \sqrt{[r^2 - \frac{r^2}{16}(1 - 2\sqrt{5} + 5)]} = \sqrt{r^2 - \frac{6}{16}r^2 + \frac{2}{16}r^2\sqrt{5})}$
$= \sqrt{\left(\frac{16r^2 - 6r^2 + 2r^2\sqrt{5}}{16}\right)} = \frac{r}{4}.\sqrt{(10 + 2\sqrt{5}} = sin\,72°.$

3) Sodann ist $sin\,15° = \frac{r}{2}.\sqrt{(2 - \sqrt{3})} = cos\,75°$. Denn es ist vermög §. 234. 6)
$sin\,15° = sin\,\frac{1}{2}.30° = \sqrt{\left(\frac{r^2 - r.cos\,30°}{2}\right)} = \sqrt{\left(\frac{r^2 - r.\frac{r}{2}\sqrt{3}}{2}\right)}$
$= \sqrt{\left(\frac{2r^2 - r^2\sqrt{3}}{4}\right)} = \frac{r}{2}.\sqrt{(2 - \sqrt{3})} = cos\,75°.$

Daraus findet man $cos\,15° = \frac{r}{2}.\sqrt{(2 + \sqrt{3})} = sin\,75.$ Denn es ist vermög §. 230. I.
$cos\,15° = \sqrt{r^2 - (sin^2\,15°)} = \sqrt{[r^2 - \frac{r^2}{4}(\sqrt{2 - \sqrt{3}})^2]}$
$= \sqrt{\left[\frac{4r^2 - r^2(2 - \sqrt{3})}{4}\right]} = \frac{r}{2}.\sqrt{(4 - 2 + \sqrt{3})} = \frac{r}{2}\sqrt{(2 + \sqrt{3})}$
$= sin\,75°.$

4) Nun findet man aus $sin\,18°$ und $sin\,15°$, sodann aus $cos\,18°$ und $cos\,15°$ nach den Formeln I. und II. in §. 233
$sin\,(18° - 15°) = sin\,3°$, und auch $cos\,(18° - 15°) = cos\,3°$; wenn man nämlich für $sin\,18°$ u. $cos\,18°$, sodann $sin\,15°$ und $cos\,15°$ die erst entwickelten Werthe in diese Formeln I. und II. gehörig substituirt, und dann weiter nach den (Rk. 216.) gegebenen Regeln verfährt; so findet man

$$sin\,3° = 523359562{,}43;$$
$$\text{und } cos\,3° = 9986295347{,}55.$$

5) Aus diesen wird endlich durch die Halbirung nach den Formeln 3) und 4) in §. 234 der $sin\,(1\frac{1}{2}°)$ und $cos\,(1\frac{1}{2}°)$, und sodann $sin\,\frac{3}{4}°$ und $cos\,\frac{3}{4}°$ gefunden. Hierauf wird nach den Formeln I. und II. im §. 233 der $sin\,(1\frac{1}{2}° + \frac{3}{4}°) = sin\,2\frac{1}{4}°$, und auch $cos\,2\frac{1}{4}°$;
ferner $sin\,3\frac{3}{4}°$, $sin\,4\frac{1}{2}°$, $sin\,5\frac{1}{4}°$, $sin\,6°$, $sin\,6\frac{3}{4}°$ ...,
nebst $cos\,3\frac{3}{4}°$, $cos\,4\frac{1}{2}°$, $cos\,5\frac{1}{4}°$, $cos\,6°$, $cos\,6\frac{3}{4}°$, u. s. w.
bis $sin\,45°$ und $cos\,45°$ bestimmt und in Zahlen entwickelt. Auf diese Art kommen endlich die Sinuse und Cosinuse von 0° bis 90°, von $\frac{3}{4}$ zu $\frac{3}{4}$ Grad zum Vorschein, wenn man die Rechnung nur bis 45° fortsetzt (§. 232.).

Da überdieß der Sinus und Cosinus von 45° auch aus andern Gründen bekannt, nämlich $sin\,45° = cos\,45° = \frac{r}{2}\sqrt{2} = 7071067812$ ist (§. 231.); so dienet dieser Umstand zugleich zur Probe, ob sich bey der Berechnung der Sinuse und Cosinuse kein Fehler eingeschlichen habe.

Fig.

6) Damit man nun die Sinuse und Cosinuse für alle einzelnen Minuten erhalte, so ist es nothwendig, einmahl den $sin\ 1'$ zu finden. Diesen hat man auf folgende Weise erhalten: Aus dem $sin\ \frac{3}{4}^\circ = sin\ 45'$ findet man durch die fortgesetzte Halbirung nach der Formel 6) in §. 234, den $sin\ \frac{45'}{2}$, sodann $sin\ \frac{45'}{4}$; ferner $sin\ \frac{45'}{8}$, aus diesem den $sin\ \frac{45'}{16}$, endlich $sin\ \frac{45'}{32} = 4090615{,}32$;

und darauf $sin\ \frac{45'}{64} = 2045307{,}7$.

7) Nun zeigte sich bey dieser Berechnung, daß bey dem angenommenen Halbmesser $r = 10\,00\,000\,000$ der $sin\ \frac{45'}{64}$ in so weit der Hälfte vom $sin\ \frac{45'}{32}$ gleich ist, als der Bogen oder Winkel von $\frac{45'}{64}$ genau die Hälfte des Bogens $\frac{45'}{32}$ ist, und daß also der Fehler keinen zehntausendmillionten Theil des Halbmessers beträgt. Aus diesem Grunde hat man geschlossen, daß bey so kleinen Bogen wie $\frac{45'}{32}$ und $\frac{45'}{64}$, und bey dem angenommenen Halbmesser, die Sinuse mit den dazu gehörigen Bogen in Proportion stehen, und hat den $sin\ 1'$ durch folgende Proportion gefunden; nämlich es verhält sich der Bogen von

$$\tfrac{45}{64} : 1' = sin\ \tfrac{45'}{64} : sin\ 1'$$

das ist $\frac{45'}{64} : 1' = 2045307{,}7 : sin\ 1'$; folglich ist

$$sin\ 1' = 2045307{,}7 : \tfrac{45}{64} = 2045307{,}7 \,.\, \tfrac{64}{45} = 2908882{,}06.$$

8) Nachdem einmahl der Sinus von 1 Minute bekannt war, so konnte man die Sinuse und Cosinuse für alle einzelnen Minuten von 1′ bis 90° nach der Formel **I.** und **II.** im §. 233. berechnen. Aus den gefundenen Sinusen und Cosinusen hat man die Tangenten und Cotangenten nach den Formeln

$$tang\ a = \frac{r\,.\,sin\ a}{cos\ a},\ \text{und}\ cot\ a = \frac{r\,.\,cos\ a}{sin\ a}\ (\text{§. 230. II. u. III.})$$

sehr leicht durch eine bloße Division berechnet. Diese berechneten Linien hat man endlich in eine Tafel eingetragen, und überdieß noch zur bequemen Rechnung der ausübenden Trigonometrie zu allen diesen in Zahlen ausgedrückten Linien die entsprechenden gemeinen Logarithmen derselben aufgesucht, und gleichfalls in Tafeln eingetragen, die unter den Namen Sinustafeln, oder eigentlich logarithmisch-trigonometrische Tafeln bekannt sind.

§. 236.

Die Zahlen dieser berechneten Linien sind alle, außer dem *sin* 30°, *sin* 90°, *tang* 45° und *cot* 45°, irrational, und lassen sich durch Annäherung so genau, als man es nur immer verlangen kann, bestimmen; und da man bey der Berechnung dieser Linien den *sin. tot.*

$= r =$ 10 000 000 000 angenommen hat, so folgt, daß *log sin. tot.* $= 10$ ohne Bruch ist. Fig.

In einigen der älteren trigonometrischen Tafeln befinden sich auch die Sekanten nebst ihren zustimmenden Logarithmen. Allein diese sind heut zu Tage entbehrlich, weil sich alle trigonometrischen Aufgaben auch ohne diese Hülfslinien auflösen lassen. Dasselbe gilt auch von den Quer-Sinusen.

C. Von dem Gebrauche der trigonometrischen Tafeln *).

§. 237.

Der Gebrauch der trigonometrischen Tafeln läßt sich am besten erlernen, wenn man eine solche Tafel wirklich zur Hand nimmt, und sich zuerst die Einleitung, wie auch die innere Einrichtung derselben bekannt macht. Da die Einleitung zu deren Gebrauche einer jeden solchen Tafel beygefügt ist, so wollen wir hier nur, um dasjenige Verfahren zu erläutern, wie zu einem Winkel, der nebst Graden und Minuten auch Secunden bey sich führt, die dazu gehörige trigonometrische Linie, uud umgekehrt zu suchen sey, folgendes anführen.

1) Zu einem Winkel oder Bogen, der nebst den Graden und Minuten auch Secunden enthält, findet man in den Tafeln, die nur von Minute zu Minute berechnen sind, die dazu gehörige trigonometrische Linie oder ihren Logarithmus, mit einem Worte die trigonometrische Function, wenn man schließt: 60 Secunden verhalten sich zu den gegebenen Secunden, gleich wie die Differenz der Functionen des nächst größern und nächst kleinern Winkels in den Tafeln sich zu einer 4ten Proportional-Zahl verhält. Diese gefundene Proportional-Zahl wird nun zu der Function des nächst kleinern Winkels addirt, wenn mit den Winkeln auch die Functionen wachsen, davon aber abgezogen, wenn die Functionen abnehmen, während die Winkel wachsen (vermög §. 229. wird also diese gefundene Zahl zu den Functionen: Sinus, Tangenten etc. addirt, aber von den Cofunctionen: Cosinus, Cotangenten, u. s. w. abgezogen); und das Resultat hiervon ist die gesuchte Function des gegebenen Winkels, der nebst den Graden und Minuten auch Secunden enthält.

---

*) Wegen Correctheit, bequemen Gebrauche, schönem Druck und Papier und billigem Preise dürften, ohne unbescheiden zu seyn, meine logarithmischen und logarithmisch-trigonometrischen Tafeln, Wien bey Heubner, zu empfehlen seyn.

Fig. 132. Denn es sey bic ein Bogen von $1' = arc\ 60''$, und ai ein gegebener Bogen oder Winkel, der zwischen die Bogen ab und ac hineinfällt, es sey nämlich $bi = arc\ n''$, z. B. $bi = arc\ 54''$; so kann man bic als eine gerade Linie, ab als den nächst kleinern, und ac als den nächst größern Bogen oder Winkel ansehen; es ist daher gb die nächst kleinere, und cf die nächst größere Function, z. B. der Sinus; ferner ist $cd = cf - df = cf - bg$ die Differenz der nächst größern und nächst kleinern Function in den Tafeln, und $ik = ih - bg$ die Differenz der gegebenen und nächst kleinern Function. Das rechtwinkelige Dreyeck bdc ist ähnlich bki (§. 61. 2.); daher verhält sich $bc : cd = bi : ik$,

oder $bc : bi = cd : ik$, ... (A)

oder $60'' : n'' = (cf - bg) : ik$; . . . (B)

nämlich $60''$ verhalten sich zu den gegebenen n'', gleich wie die Differenz der nächst größern und nächst kleinern Function in den Tafeln zu ik sich verhält, welches gefundene ik man zu bg als der nächst kleinern Function in den Tafeln addiren muß, um ih als die gesuchte Function des gegebenen Bogens ai zu erhalten.

Es sey z. B. $ab = 53°\ 28'$, $ac = 53°\ 29'$, und $ai = 53°\ 28'\ 54''$, wozu eine trigonometrische Linie z. B. der Sinus zu suchen ist,

so ist vom nächst größern Winkel L *) $sin\ (53°\ 29') = 9{,}905085$
und vom nächst kleinern Winkel $L\ sin\ (53°\ 28') = 9{,}904992$
daher die Differenz für $1'$ oder $60''$ . . . . $= +93$
folglich $60'' : 54'' = 93 : x$; nämlich es ist $x = 84$.

Nun aber ist vom nächst kl. Winkel $L\ sin\ (53°\ 28') = 9{,}904992$
und die vierte Prop. Zahl x wegen . . . . . $54'' = +84$
folgl. ist für den gegeb. Winkel $L\ sin\ (53°\ 28'\ 54'') = 9{,}905076$.

Desgleichen sey zu suchen $L\ cot\ (53°\ 28'\ 54'')$,
so ist vom nächst größern Winkel $L\ cot\ (53°\ 29') = 9{,}869473$
und vom nächst kleinern Winkel $L\ cot\ (53°\ 28') = 9{,}869737$
daher die Differenz für $1'$ oder $60''$ . . . . . $= -264$
folglich $60'' : 54'' = -264 : x$; es ist nämlich $x = -238$.

Nun ist vom nächst kleinern Winkel $L\ cot\ (53°\ 28') = 9{,}869737$
und die vierte Prop. Zahl x wegen . . . . . $54'' = -238$
folgl. ist für d. gegeb. Winkel $L\ cot\ (53°\ 28'\ 54'') = 9{,}869499$.

*) Der Kürze wegen werden wir das Wort Logarithmus nur mit L bezeichnen.

2) Umgekehrt, zu einer gegebenen trigonometrischen Function, die in den Tafeln nicht genau anzutreffen ist, wird der zugehörige Winkel oder Bogen in Graden, Minuten und Secunden gefunden, wenn man schließt: Fig. 132.

Die Differenz der nächst größern und nächst kleinern Function in den Tafeln verhält sich zur Differenz der gegebenen und nächst kleinern Function, gleich wie sich 60″ zu einer 4ten Proportional-Zahl verhalten. Diese 4te Proportional-Zahl gibt eine Anzahl von Secunden, die man zu den Graden und Minuten der nächst kleinern Function addiren muß, wenn mit dem Winkel auch die Functionen wachsen (nämlich bey den Sinusen, Tangenten ꝛc.), davon aber abziehen muß, wenn die Functionen abnehmen, während die Winkel wachsen (d. i. bey den Cosinusen, Cotangenten u. s. w.).

Denn aus der obigen Proportion (A) folgt ferner

$$cd : ik = cb : bi$$

oder $(cf - bg) : (ih - bg) = 60'' : x''$ . . . . (C)

nämlich die Differenz der nächst größern und nächst kleinern Function verhält sich zur Differenz der gegebenen und nächst kleinern Function, gleich wie 60″ zu x'' sich verhalten. Diese gefundenen x'' werden zu dem Bogen ab addirt, um ai als den gesuchten Bogen oder Winkel der gegebenen Function ih zu erhalten, u. s. w. Da ferner bey sehr großen Zahlen und kleinen Unterschieden derselben die Differenzen der Zahlen sich so gegen einander verhalten, wie die Differenzen ihrer Logarithmen (S. meine Log. §. 1 bis 3), so gelten die obigen Proportionen auch von den Logarithmen solcher Functionen, die nur um eine sehr kleine Größe, wie hier nicht über 60 Secunden von einander unterschieden sind.

Es sey z. B. 9,880783 der Logarithmus des Cosinus eines gewissen Winkels, so findet man in den Tafeln, daß der dazu gehörige Winkel größer als 40° 32′, aber kleiner als 40° 33′ ist.

Es ist nämlich $L\ cos\ (40°\ 33') = 9,880722$
und $L\ cos\ (40°\ 32') = 9,880830$

daher ist die Differenz für 1′ oder 60″ = — 108

Der gegebene Logarithmus ist = 9,880783
und der nächst kleinere $L\ cos\ (40°\ 33') = 9,880722$

daher ihre Differenz = 61

folgl. verh. sich — 108 : 61 = 60″ : x''; nämlich x = — 34″.

Fig. 132. Da nun der nächst kl. Function der Winkel $40^\circ\ 33'$ entspricht,
der 4ten Prop. Zahl x aber . . . . . — $34''$ entsp.

so ist der gesuchte Winkel oder Bogen $40^\circ\ 32'\ 26''$.

Desgleichen sey 10,194838 der Logarithmus von der Tangente eines gewissen Winkels,

so ist L *tang* $(57^\circ\ 27') = 10{,}194977$
und L *tang* $(57^\circ\ 26') = 10{,}194698$

daher ist die Differenz für 1′ oder $60'' = +279$
Der gegebene Logarithmus ist $= 10{,}194838$
und der nächst kleinere L *tang* $(57^\circ\ 26') = 10{,}194698$

daher ihre Differenz $= 140$

folglich verhält sich $279 : 140 = 60'' : x''$; nämlich $x = +30''$.

Da nun der nächst kl. Function der Winkel $57^\circ\ 26'$ entspricht,
der 4ten Prop. Zahl x aber . . . . $+30''$ entsprechen;

so ist der gesuchte Winkel oder Bogen $= 57^\circ\ 26'\ 30''$.

§. 238.

1) Aus der §. 237. 1) aufgestellten Proportion (B) findet man $ik = n . \frac{(cf - bg)}{60} = n'' . \frac{cd}{60}$. Nun aber ist $\frac{cd}{60}$ = der Differenz von 1″; weil die Proportion $60'' : 1'' = cd : \frac{cd}{60}$ Statt findet, d. h. wenn man die Differenz von 60″, nämlich cd in 60 gleiche Theile getheilt denkt, so ist ein solcher Theil = der Differenz von 1″; also folgt, daß man den proportionirten Theil ik findet, **wenn man die Differenz von 1″ mit der gegebenen Anzahl der Secunden n multiplicirt.**

In den vollständigen logarithmisch-trigonometrischen Tafeln findet man die Differenz von 1 Secunden für alle Functionen auf jedem Blatte auch wirklich schon beygefügt, wodurch man die obigen Proportionen erspart, indem man nur die gegebene Anzahl der Secunden mit der gehörigen Differenz von 1 Secunde multiplicirt, um den proportionirten Theil zu erhalten, welcher nach Umständen zu der Function des nächst keinern Winkels entweder addirt, oder davon abgezogen werden muß (§. 237. 1.).

2) Da ferner aus der §. 237. aufgestellten Proportion (C) $bi = x'' = \frac{(ih - bg) . 60}{cf - bg} = \frac{ik . 60}{cd} = ik . \frac{60}{cd} = ik : \frac{cd}{60}$ folgt (Rk. 106 in 1.); so findet man die Anzahl von Secunden, welche zu den Graden und Minuten der nächst kleinern Function nach Um-

ständen entweder addirt, oder davon abgezogen werden müssen (§. 237. 1.), um den gesuchten Winkel oder Bogen zu finden, wenn man die Differenz der gegebenen und nächst kleinern Functionen in den Tafeln, durch die Differenz von 1 Secunde dividirt. Fig. 132.

§. 239.

In der Trigonometrie pflegt man sehr oft den Halbmesser oder *sin. tot.* $= 1$ zu setzen, weil dadurch die trigonometrischen Formeln eine für die Rechnung viel einfachere Gestalt erhalten, und doch wieder, wenn sie logarithmisch behandelt werden sollen, sehr leicht auf den Halbmesser $r = 10000000000$ gebracht werden können. Dieser Rechnungsvortheil gründet sich auf den Satz: daß die trigonometrischen Linien von ähnlichen Bogen in verschiedenen Kreisen sich gegen einander verhalten, wie die dazu gehörigen Halbmesser.

1) Denn in den ähnlichen Dreyecken Mbc und MBC verhält sich $Mb : bc = MB : BC$, 133.
oder $Mb : MB = bc : BC$, oder wenn man den Halbmesser $Mb = 1$ und $MB = r$ setzt, so verhält sich

$1 : r = bc : BC$; folglich ist

$BC = bc . r$

und $L\,BC = L\,bc + L\,r = L\,bc + 10$ (§. 236.).

Ist demnach für den Halbmesser 1 der Logarithmus einer trigonometrischen Linie gegeben, so darf man zu diesem nur den L *sin. tot.* $= L\,r = 10$ addiren, und hierzu die entsprechende Zahl nehmen, um dieselbe auf den Halbmesser $r = 10\,000\,000\,000$ zu bringen.

2) Desgleichen verhält sich $Ma : ad = MA : AD$

oder $Ma : MA = ad : AD$

oder $1 : r = ad : AD$; daraus ist

$$ad = \frac{AD}{r}, \text{ und}$$

$$L\,ad = L\,AD - L\,r = L\,AD - 10.$$

Man kann also umgekehrt, die für den Halbmesser r berechneten Sinus, Cosinus, Tangenten, u. s. w. leicht für den Halbmesser $= 1$ einrichten, wenn man von dem Logarithmus einer jeden zu dem Halbmesser r gehörigen trigonometrischen Linie den $L\,r = 10$ abzieht, und hierzu die entsprechende Zahl nimmt.

Fig. 133. Nur pflegt man diese Subtraction nicht wirklich zu verrichten, sondern aus dem Grunde, der schon (Nr. 341. 3.) angeführt wurde, nur anzuzeigen. Z. B. wenn für den Halbmesser r der

$L\ AD = 8{,}301497$ gefunden wird; so ist

$L\ ad = 8{,}301497 - 10 = 0{,}301497 - 2.$

§. 240.

Soll demnach ein trigonometrischer Ausdruck, bey welchem der Halbmesser $= 1$ zum Grunde liegt, nach den gewöhnlichen logarithmisch-trigonometrischen Tafeln, die für den Halbmesser $r = 10000000000$ berechnet sind, entwickelt werden; so kann man sich dabey folgender Regel bedienen. Man nehme zu einer jeden trigonometrischen Linie den entsprechenden Logarithmus aus den Tafeln, hänge rechts -10 an, und reducire gehörig; so hat man dadurch alles auf den Halbmesser $= 1$ gebracht (§. 239. 2.). Ist nun das Resultat der Logarithmus einer trigonometrischen Linie, so addire man zu demselben $+10$, dadurch wird dasselbe auf den Halbmesser $= r$ gebracht (§. 239. 1.); endlich nehme man aus der Tafel den dieser logarithmischen Linie entsprechenden Winkel. Es wäre z. B. durch irgend eine Rechnung für den $sin.\ tot. = 1$, die $cot\ x = \frac{tang\ 60^\circ \cdot sin^2\ 20^\circ \cdot cos\ 15^\circ}{sin^2\ 25^\circ}$ gefunden worden; so ist

$L\ cot\ x = L\ tang\ 60^\circ + 2L\ sin\ 20^\circ + L\ cos\ 15^\circ - 2\ L\ sin\ 25^\circ$,

und es kann die fernere Entwickelung logarithmisch auf folgende Weise vorgenommen werden.

$$9{,}534052 - 10$$
$$2$$
$$2\ L\ sin\ 20^\circ = 19{,}068104 - 20$$
$$L\ tang\ 60^\circ = 10{,}238561 - 10$$
$$L\ cos\ 15^\circ = 9{,}984944 - 10$$
$$39{,}291609 - 40$$
abgezogen $2\ L\ sin\ 25^\circ = 19{,}251896 - 20$

$$-\qquad +$$

so ist $20{,}039713 - 20$

(Resultat für $sin.\ tot. = 1$) $0{,}039713$

hierzu $+\ 10$ addirt;

also ist $L\ cot\ x = 10{,}039713$ (für $sin.\ tot. = r$)

folglich der Winkel $x = 42^\circ\ 23'\ 3''$

Die Richtigkeit dieser Regel erhellet aus dem nächst vorhergehenden §. 239. Fig.

IV. Anwendung des Bisherigen auf die Berechnung der Dreyecke selbst.

§. 241.

Bey der Berechnung der Dreyecke aus drey bekannten Stücken, worunter jedes Mahl wenigstens Eine Seite seyn muß, kommen drey wesentlich verschiedene Fälle vor:

1) wenn zwey Winkel und Eine anliegende oder dazwischen liegende Seite, oder zwey Seiten und Ein anliegender Winkel;

2) wenn zwey Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel, und

3) wenn alle drey Seiten eines Dreyeckes bekannt sind, die übrigen drey Stücke, und wenn es nöthig ist, auch den Flächeninhalt durch die Rechnung zu finden; und zwar kann in jedem dieser drey Fälle

a) das Dreyeck spitzwinkelig,
b) rechtwinkelig, oder
c) stumpfwinkelig seyn.

§. 242.

An jedem Dreyecke ACB verhalten sich die Seiten so gegen einander, wie die (in den Tafeln berechneten) Sinuse der gegenüberstehenden Winkel. 134.

1) Ist das Dreyeck spitzwinkelig, so ziehe man aus zwey Scheiteln A und B mit gleichem Halbmesser $Am = Bp = r$ (gleich dem *sinus totus* in den Tafeln) Kreisbogen, und ziehe aus den Durchschnitten m und p die Senkrechten mn und pq, so wie die Senkrechte CD auf AB, so ist $mn = \sin A$ und $pq = \sin B$ (§. 220.), und in den ähnlichen Dreyecken Amn und ACD, so wie in Bpq und BCD verhält sich

$$Am : mn = AC : CD, \text{ oder } r : \sin A = AC : CD$$
$$\text{und } Bp : pq = BC : CD, \text{ oder } r : \sin B = BC : CD$$

folglich verhält sich verm. (Rk. 270. 2) $AC : BC = \sin B : \sin A$
Eben so läßt sich beweisen, daß $AB : AC = \sin C : \sin B$
und auch $\sin A : BC = \sin C : AB$ Statt findet.

2) Ist das Dreyeck rechtwinkelig, wie z. B. ADC, so verhält sich ebenfalls

Fig. 134.
$AC : CD = Am : mn$
oder $AC : CD = r : \sin A$ weil $Am = r = sintot = \sin 90° =$
oder $AC : CD = \sin D : \sin A$ $\sin n = \sin D$ ist.

Desgleichen $CD : AD = \sin A : \sin ACD$ weil verm. §. 232 $\sin ACD$
oder $CD : AD = \sin A : \cos A$ $\sin (90 - A) = \cos A$ ist.

36. 3) Zieht man bey einem stumpfwinkeligen Dreyecke ABC, die Senkrechte CD, auf die Verlängerung AD, so verhält sich vermöge des Vorigen in 2)

$AC : CD = \sin D : \sin A$; in rechtw. 3ecke ACD,
und $BC : CD = \sin D : \sin q$; „ „ „ BCD,
daher auch $AC : BC = \sin q : \sin A$ (Nr. 270. 2);
oder $AC : BC = \sin p : \sin A$; weil $\sin q = \sin p$ ist (§. 225. 2).
Ingleichen verhält sich $AC : AB = \sin p : \sin n$; u. s. w.

Durch Hülfe dieses Satzes kann man nun aus zwey bekannten Winkeln und einer Seite, oder aus zwey Seiten und einem anliegenden Winkel jedes Dreyeck gänzlich auflösen oder berechnen, wenn nur im letzten Falle das Dreyeck durch die gegebenen zwey Seiten und dem anliegenden Winkel nach §. 52 hinlänglich bestimmt ist.

§. 243.

1. Aufgabe. Aus zwey Winkeln $m = 40°$ und $p = 103°$ und der zwischenliegenden Seite $AB = 460{,}5$ Kl., die Seite AC, des Dreyeckes ABC zu bestimmen.

Auflösung. Aus den Winkeln m und p findet man den Winkel) $n = 180° - (40° + 103°) = 37°$, und sodann verhält sich

$AC : AB = \sin p : \sin n$ weil $\sin 77° =$
oder $AC : 460\frac{1}{2} = \sin 103° : \sin 37°$ $\sin (180° - 103°)$ ist
oder $AC : 460{,}5 = \sin 77° : \sin 37°$ vermöge §. 225. 2).

daher ist $AC = \dfrac{460{,}5 \cdot \sin 77°}{\sin 37°}$,

und $L\ AC = L\ 460{,}5 + L \sin 77° - L \sin 37°$.

Nun ist $L\ 460{,}5 = 2{,}663230$
$L \sin 77° = 9{,}988724$
addirt $12{,}651954$
abgezogen $L \sin 37° = 9{,}779463$
so ist $L\ AC = 2{,}872491$

folglich die Seite $AC = 745{,}574$ Kl. $= 745° \ 3' \ 5''$
Eben so wird die Seite CB durch folgende Proportion gefunden:

$CB : AB = \sin A : \sin n$

und es ist $CB = \frac{AB . \sin A}{\sin n}$; daraus folgt Fig. 36.

$L\ CB = L\ AB + L \sin A - L \sin n.$

2. Aufgabe. Aus zwey Winkeln m und n, und einer anliegenden Seite AB den Flächeninhalt $= F$ des Dreyeckes ABC zu finden.

Auflösung. Man ziehe die Senkrechte BE, so verhält sich im rechtwinkeligen Dreyecke ABE

$$EB : AB = \sin m : \sin (E = 90°),$$

oder $EB : AB = \sin m : 1$ vermöge §. 239.;

folglich ist die Höhe $EB = AB . \sin m.$

In der vorigen Auflösung findet man aus der 1ten Proportion die Grundlinie $AC = \frac{AB . \sin p}{\sin n} = \frac{AB . \sin (m + n)}{\sin n}$, weil sich $m + n$ mit p auf 180° ergänzen (§. 225. 2).

Der Flächeninhalt des Dreyeckes ABC ist $= \frac{AC . EB}{2}$ vermög (§. 135); folglich ist

$$F = \frac{AB . \sin (m + n) . AB . \sin m}{2 . \sin n} = \frac{AB^2 . \sin m . \sin (m + n)}{2 . \sin n}.$$

Nun ist	$2\ L\ AB =$	$5,326460$
	$L \sin m =$	$9,808067 - 10$
	$L \sin (m + n) =$	$9,988724 - 10$
	L des Zählers $=$	$25,123251 - 20$
abgezogen	$L\ 2 =$	$0,301030$
	$L \sin n =$	$9,779463 - 10$
		$- \quad +$
	also ist $L\ F =$	$15,042758 - 10$ (Nk. 57.)
	oder $=$	$5,042758$
	endlich $F =$	$110346,3\ q°.$

§. 244.

An jedem Dreyecke verhält sich die Summe zweyer Seiten zu ihrer Differenz, gleichwie sich die Tangente der halben Summe der diesen Seiten gegenüber stehenden Winkel, zur Tangente der halben Differenz eben derselben Winkel verhält.

Dieser Satz läßt sich durch eine ganz einfache Verzeichnung auf folgende Art beweisen. Man verlängere in dem Dreyecke ACB am 135.

Fig. 135. Scheitel eines Winkels CAB die größere einschließende Seite BA unbestimmt, und beschreibe mit der kleinern einschließenden Seite AC aus jenem Scheitel A einen halben Kreisbogen DCF; so ist $AD = AF = AC$, weil sie Halbmesser eines Kreises sind; ferner ziehe man die Sehnen DC und CF, so ist der Winkel $DCF = 90°$ (§. 45. 3), daher $FC \perp DC$. Verlängert man die Sehne DC und zieht aus B die Parallele BE zu FC, so ist auch $BE \perp DE$; beschreibt man endlich mit dem Halbmesser BE den Kreisbogen EG; so ist $EC = tang\ t$, und $ED = tang\ (t + y)$ verm. §. 221. Nun verhält sich $BD : BF = ED : EC$ (§. 79.), nämlich $(AB + AC) : (AB - AC) = tang\ (t + y) : tang\ t \ldots\ldots$ (A), weil vermöge Construction $BD = AB + AD = AB + AC$, und $BF = AB - AF = AB - AC$ ist.

Wegen der parallelen Lage BE mit FC, ist der Winkel $t = q$ (vermöge §. 36. 1) und im Dreyecke FCB der äußere Winkel $m = q + y = t + y$, vermöge §. 54.
Im gleichschenkeligen Dreyecke ACF ist.... $m = p$
im Dreyecke ACF ist der äußere Winkel $n = p + m = 2m$
im Dreyecke ACB ist der äußere Winkel $n = x + y$,

daher ist auch $2m = x + y$,

daraus folgt $m = \frac{x + y}{2} = \frac{1}{2}(x + y)$.

Vermöge des Vorigen ist auch $m = t + y$

folglich ist $t + y = \frac{1}{2}(x + y)$.

Hieraus folgt $t = \frac{x + y}{2} - y = \frac{x + y - 2y}{2} = \frac{x - y}{2}$ $= \frac{1}{2}(x - y)$. Wenn man nun diese Werthe für $t + y$ und t in der obigen Proportion (A) substituirt; so erhält man endlich den oben aufgestellten Satz:

$$(AB + AC) : (AB - AC) = tang\ \tfrac{1}{2}(x + y) : tang\ \tfrac{1}{2}(x - y).$$

Vermittelst dieses Satzes kann man bey einem Dreyecke aus zwey gegebenen Seiten und dem eingeschlossenen Winkel die zwey übrigen Winkel jeden insbesondere finden, indem man den gegebenen von 180° abzieht, und dadurch die Summe der zwey unbekannten Winkel erhält; dividirt man nun diese Summe durch 2, so findet man, vermöge der vorhergehenden Proportion, die Tangente der halben Differenz dieser zwey Winkel, zu welcher Tangente man aus der Tafel den entsprechenden Winkel nimmt, und zur bekannten halben Summe der zwey unbekannten Winkel addirt,

um den größern Winkel, und eben diese in der Tafel gefundene Grade, Minuten ꝛc. von jener halben Summe abzieht, um den kleinern Winkel, der nämlich der kleinern gegebenen Seite gegenüber steht, zu erhalten (Nk. 242. 1. Aufg.). Nachdem einmahl die unbekannten Winkel gefunden sind, so ist es leicht, die dritte noch unbekannte Seite nach dem §. 242 aufgestellten Satze zu bestimmen. Fig. 135.

§. 245.

1. Aufgabe. Aus den bekannten Seiten $AB = 628°,3$ und $AC = 583°,5$ und dem eingeschlossenen Winkel $A = 28° \; 35'$ die übrigen Stücke des Dreyeckes ABC zu bestimmen. 134.

Auflösung. Aus dem gegebenen Winkel A findet man die halbe Summe der übrigen zwey $C + B = 180° - 28° \; 35' = 151° \; 25'$ und $\frac{1}{2}(C+B) = 75° \; 42' \; 30''$; und vermöge des obigen Satzes verhält sich

$$(AB + AC) : (AB - AC) = tang\, \tfrac{1}{2}(C+B) : tang\, \tfrac{1}{2}(C-B),$$

oder $1211,8 : \quad 44,8 = tang\; 75° \; 42' \; 30'' : tang\, \tfrac{1}{2}(C-B)$,

daraus folgt $tang\, \tfrac{1}{2}(C-B) = \dfrac{44,8 \,.\, tang\; 75° \; 42' \; 30''}{1211,8}$.

Nun ist L 44,8	=	1,651278	
L tang 75° 42′	=	10,593636	
Proport. Th. wegen 30″		 264	vermög (§. 238. 1)
L des Zählers	=	12,245178	
abgezogen L 1211,8	=	3,083431	
so ist L tang $\frac{1}{2}(C-B)$	=	9,161747	
und $\frac{1}{2}(C-B)$	=	8° 15′ 27″	
Verm. Obigen ist $\frac{1}{2}(C+B)$	=	75° 42′ 30″	
folglich der größ. Winkel C	=	83° 57′ 57″	vermög
und der kleinere B	=	67° 27′ 3″	Nk. 242. 1).

Die dritte Seite CB kann nun nach dem §. 242 aufgestellten Satze bestimmt werden. Man findet nämlich $CB = 302°,28$.

a) Die dritte Seite kann nach den weiter unten folgenden Gründen auf einem etwas kürzern Wege als hier gefunden werden.

2) Aufgabe. Aus den oben gegebenen drey Stücken, den Flächeninhalt $= F$ des Dreyeckes zu bestimmen.

Auflösung. Man fälle $CD \perp AB$, so ist aus dem rechtwinkeligen Dreyecke ADC

Fig. 134. die Höhe $CD = \frac{AC \cdot \sin A}{\sin 90^\circ}$ vermög §. 242. 2).
oder $CD = AC \cdot \sin A$, für $\sin. tot. = 1$ (§. 239.).
Ferner ist $F = \frac{1}{2} AB \cdot CD$ vermög (§. 135.),
daher auch $F = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A = \frac{628{,}3}{2} \cdot 583{,}5 \cdot \sin 28^\circ\, 35'$.

Nun ist $L\ 314{,}15 = 2{,}497136$
$L\ 583{,}5 = 2{,}766041$
$L \sin 28^\circ\, 35' = 9{,}679824 - 10$

also ist $L\ F = 4{,}943001$
endlich $F = 87700{,}2\ q^\circ$

b) Ist der gegebene eingeschlossene Winkel $A = 90^\circ$ so ist $\sin A = \sin 90^\circ = 1$, daher $F = \frac{1}{2} AB \cdot AC$, wie §. 136.

§. 246.

Wenn man an einem ungleichseitigen Dreyecke ABC die größere Seite AB als die Grundlinie wählt, und auf diese aus dem Scheitel des gegenüber stehenden Winkels C eine Senkrechte CD fället, so entstehen zwey Abschnitte AD und DB; und es verhält sich die Grundlinie zur Summe der übrigen zwey Seiten, gleichwie die Differenz dieser nämlichen zwey Seiten zur Differenz der Abschnitte sich verhält.

Der Beweis dieses Satzes ist schon §. 96 geführt worden, und man kann mit Hülfe desselben aus den gegebenen drey Seiten eines Dreyeckes die Winkel finden, wenn man vorher nach (§. 97.) einen oder den andern Abschnitt auf der Grundlinie bestimmt, und sodann die an denselben anliegenden Winkel nach (§. 242. 2) suchet.

§. 247.

1. Aufgabe. Aus den gegebenen drey Seiten $AB = 231^\circ{,}18$, $AC = 162^\circ{,}8$ und $CB = 107^\circ{,}3$ jeden der drey Winkel des Dreyeckes ABC zu bestimmen.

Auflösung. Man ziehe auf die größere Seite AB die Senkrechte CD, so findet man mit Hülfe des §. 96 aufgestellten Satzes einen Abschnitt, z. B. $DB = 83^\circ{,}17$; im rechtwinkeligen Dreyecke BDC verhält sich sodann

$CB : BD = \sin 90^\circ : \sin DCB$,
oder $CB : BD = 1 : \cos B$ (§. 242. 2),
daraus ist $\cos B = \frac{BD}{CB} = \frac{83{,}17}{107{,}3} = 0{,}775116$.

Ist man mit einer für den *sinus tot.* = 1 berechneten Sinus-Tafel versehen, so findet man daraus des vorstehenden *cos B* entsprechenden Winkel $B = 39° 11' 4''$ (§. 237.). Fig. 134.

Außer diesem ist $L\ 83{,}17 = 2{,}919967 - 1$
und $L\ 107{,}3 = 2{,}030600$

also ist $L \cos B = 0{,}889367 - 1$
oder $= 9{,}889367$,
endlich $B = 39° 11' 4''$ wie oben.

Aus den nun bekannten Stücken ergibt sich im rechtwinkeligen Dreyecke *ACD* der Winkel $A = 24° 36' 42''$; zieht man sodann die Summe der Winkel *A* und *B* von 180° ab, so erhält man endlich auch den dritten Winkel $C = 116° 12' 14''$.

a) Für die Bestimmung der Winkel aus den gegebenen drey Seiten eines Dreyeckes wird weiter unten ein kürzerer Weg gezeigt werden.

2. Aufgabe. Aus den oben bekannten drey Seiten den Flächeninhalt des Dreyeckes *ABC* zu finden.

Auflösung. Man bestimme nach §. 97 die Höhe
$$CD = \sqrt{(CB^2 - DB^2)} = \sqrt{(CB + DB)\,(CB - DB)} =$$
$$\sqrt{190{,}47 \,.\, 24{,}13} = 67{,}8\,.$$ Sodann ist
$$F = \tfrac{1}{2} AB \,.\, CD = \frac{231{,}18}{2} \,.\, 67{,}8 = 7837\ q°.$$

b) Auch für den Flächeninhalt aus den bekannten drey Seiten eines Dreyeckes, wird weiter unten eine kürzere Bestimmungsart gezeigt werden.

§. 248.

An jedem rechtwinkeligen Dreyecke *ADC* verhält sich eine Kathete zur andern, gleichwie sich der *sinus totus* zur Tangente des an der ersten Kathete anliegenden spitzigen Winkels verhält.

Denn man denke sich aus *A* mit einem Halbmesser *Af* einen Kreisbogen *fi* beschrieben, und aus *f* die Senkrechte *fg* auf *AD* errichtet; so ist $Af = sin.\,tot. = r$, und $fg = tang\ A$ (§. 221.).

Nun ist das Dreyeck $ADC \sim Afg$,
daher verhält sich $AD : DC = Af : fg$,
oder $AD : DC = r : tang\ A$.

Desgleichen findet man, daß sich $DC : DA = r : tang\ DCA$ verhält,
oder (vermög §. 232.) $DC : DA = r : cot\ A$, weil
$tang\ DCA = tang\ (90 - A) = cot\ A$ ist.

Fig. 134. Dieser Satz wird bey den rechtwinkeligen Dreyecken anstatt des oben (im §. 242.) aufgestellten gebraucht, wenn aus einer gegebenen Kathete und dem anliegenden spitzigen Winkel die andere Kathete, oder aus den bekannten zwey Katheten einer von den spitzigen Winkeln zu bestimmen ist.

§. 249.

133. 1. Aufgabe. Es sey z. B. die Kathete $AD = 143{,}2$ und die andere $MA = 172{,}36$ Klaft. gegeben, man soll den Winkel M bestimmen.

Auflösung. Im rechtwinkeligen Dreyecke MAD verhält sich
$MA : AD = r : tang\, M$ vermög §. 248,

daher $tang\, M = \frac{r \cdot AD}{MA} = \frac{r \cdot 143{,}2}{172{,}36}$.

Nun ist zu addiren $\begin{cases} L\ r = 10 \\ L\ 143{,}2 = 2{,}155943 \end{cases}$
abzuziehen $L\ 172{,}36 = 2{,}236436$

also ist $L\ tang\, M = 9{,}919507$
endlich $M = 39°\ 43'\ 13'',8$

2. Aufgabe. Es sey der Winkel $MDA = 48°\ 15'\ 46''$, und die Kathete $AD = 538{,}46$ Klaftern gegeben, man soll die andere Kathete MA finden.

Auflösung. Im rechtwinkeligen Dreyecke MAD verhält sich
$AD : AM = r : tang\, D$
oder $AD : AM = 1 : cot\, M$ (§. 232. und 239.)
und es ist $AM = AD \cdot cot\, M = 538{,}46 \cdot cot\ 41°\ 44'\ 14''$.

Nun ist $L\ 538{,}46 = 2{,}731154$
$L\ cot\ 41°\ 44' = 10{,}049629 - 10$
Proportionalth. wegen $14'' = -59$

also ist $L\ AM = 2{,}780724$
und endlich $AM = 603{,}57$ Kl.

a) Die in §§. 242, 244, 246 und 248 aufgestellten vier Sätze erstrecken sich auf alle Gattungen der geradlinigen Dreyecke, und sind hinreichend, alle Fälle zu entwickeln, die bey der Auflösung und Berechnung dieser Dreyecke vorkommen.

Zweyter Abschnitt.

Von der geradlinigen Polygonometrie.

I. Von den polygonometrischen Linien überhaupt.

§. 250.

So wie man bey der Bestimmung der unbekannten Stücke eines Dreyeckes aus den gegebenen bekannten, durch Anwendung der trigonometrischen Rechnungen die Zeichnungs- oder Constructions-Abweichungen (besonders die mittheilenden §. 120.) zu vermeiden sucht, eben so bezweckt man dieses auch in der Polygonometrie bey einer vielseitigen unregelmäßigen Figur durch Anwendung der Rechnung anstatt der Zeichnung. Wir werden von dieser Lehre jedoch nur das für uns Sachdienlichste in Kürze behandeln. Fig.

§. 251.

Jede geradlinige Figur enthält eben so viel Seiten als Winkel, und besteht daher (ohne Fläche) aus zweymahl so viel Stücken, als sie Seiten enthält (§. 47.). So wie bey jedem Dreyecke, welches sechs unterscheidbare Stücke enthält, drey derselben unbekannt seyn können, so können auch bey jedem Polygon oder Vielecke drey Stücke unbekannt seyn; es müssen also von jedem n seitigen Polygon $2n - 3$ Stücke bekannt, und in ununterbrochenem Zusammenhange gegeben seyn, um die unbekannten drey bestimmen zu können.

§. 252.

Alle Winkel eines Vieleckes enthalten so viel Mahl 180 Grade, als Seiten oder Winkel sind, weniger 360° vermöge §. 71.; es enthalten nämlich alle Vieleckswinkel *) einer n seitigen Figur $n . 180° - 360° = n . 180 - 2 . 180 = 180° . (n - 2)$. Wenn demnach alle Winkel eines Vieleckes bis auf Einen bekannt sind, so findet man diesen unbekannten Winkel, wenn man die gegebenen addirt, und ihre Summe von $180 . (n - 2)$ abzieht. Enthalten z. B. vier Winkel in einem Fünfecke folgende Grade:

*) Es werden hier durchgehends die Winkel nur den Werth haben, wie sie im Polygon selbst vorkommen, ohne äußere Nebenwinkel anzunehmen, weil dadurch das Studium dieser Wissenschaft ungemein erleichtert, und in der Ausübung die Arbeit sehr befördert wird.

Fig.

$$
\begin{aligned}
A &= 201^\circ \;\; 4' \\
B &= \;\;93 \;\; 25 \\
C &= 116 \;\; 20 \\
D &= \;\;72 \;\; 45
\end{aligned}
$$

so ist ihre Summe $= 483^\circ\ 34'$;
alle 5 Winkel enthalten aber $180 \,.\, (5 - 2) = 180 \,.\, 3 = 540^\circ$; folglich ist der 5te Winkel $= 540^\circ - (483\ 34') = 56^\circ\ 26'$.

§. 253.

Wenn A einen spitzigen Winkel, und $R = 90^\circ$, mithin $2R =$
136. 180°, $4R = 360^\circ$ u. s. w. bezeichnet; so ist bekanntlich vermög §. 229.

$$
\begin{aligned}
\sin A &= + \sin A \\
\cos A &= + \cos A \\
\sin (2R - A) &= + \sin A \\
\cos (2R - A) &= - \cos A \\
\sin (2R + A) &= - \sin A \\
\cos (2R + A) &= - \cos A \\
\sin (4R - A) &= - \sin A \\
\cos (4R - A) &= + \cos A \\
\sin (4R + A) &= + \sin A \\
\cos (4R + A) &= + \cos A
\end{aligned}
$$

u. s. w.

Dieß will sagen: zwey Winkel, die einander auf zwey oder vier rechte Winkel entweder durch die Addition oder Subtraction ergänzen, haben gleiche trigonometrische Linien; nur haben diese zum Theil eine entgegengesetzte Lage. Dieses ist auch noch wahr, wenn man die mit $4R$ abgebrochenen Betrachtungen über 4, 6, 8, 10, 12 R u. s. w. fortsetzt; auch kehrt jedes Mahl, wenn man den ganzen Umkreis oder die vier Quadranten desselben, d. i. $4R$ durchgezählt hat, und von neuem wieder durch alle $4R$ durchzählt, die nämliche Ordnung der Zeichen zurück, wovon man sich mit Hülfe der Figur 136 und den fortgesetzten obigen Betrachtungen leicht überzeugen kann.

a) Eben so könnte man für die Tangente und andern trigonometrischen Hülfslinien die Schlüsse und Gleichungen hierher setzen; wir brauchen sie jedoch hier nur für Sinuse und Cosinuse.

§. 254.

Um der Vorstellungskraft zu Hülfe zu kommen, bezeichnet man in der Polygonometrie die Winkel am Umfange nach ihrer fortlau-

fenden Ordnung mit Buchstaben des großen Alphabets, und die eines jeden Winkels nachfolgende Seite mit gleichnamigen Buchstaben des kleinen Alphabets, und zwar von der Linken gegen die Rechte, wie aus Fig. 137 zu sehen ist. Dabey ist zu merken, daß A in der ersten Abtheilung den Winkel HAB, in der 2ten Abtheilung aber den Winkel HAB' bezeichnet. Eben dasselbe ist auch vom Winkel bey H zu verstehen. Bey einer größern Figur, wo das Alphabet nicht zureicht, bedient man sich desselben Alphabets mit dieser Bezeichnung: A' B' C'.... sodann A'' B'' C'' u. s. w. Fig. 137.

Bey den polygonometrischen Berechnungen nimmt man gewöhnlich die längste Seite oder Diagonale als Grundlinie an, und ziehet auf diese aus allen Vieleckswinkeln senkrechte Linien, die man bekanntlich Ordinaten oder Breiten nennt (§. 120.), denen die abgeschnittenen Stücke der Grundlinie, vom ersten Winkel angefangen, als sogenannte Abscissen oder Längen entsprechen. Zwey nebenliegende Ordinaten werden Coordinaten (Nebenordinaten) genennt. Alle Winkel, die durch das Ziehen dieser senkrechten Ordinaten im Vielecke entstehen, und die in der Folge diese Linien, so wie auch die Abscissen bestimmen helfen, daher auch Hülfswinkel heißen mögen, lassen sich vorläufig theils durch Winkel des Vieleckes selbst, theils durch rechte Winkel auf folgende Art ausdrücken; es ist nämlich:

1) $m = R - A$, vermög §. 53. 2.); oder auch
$m = 90 - A$ (§. 253.)

Da $m + R + n = B$, mithin $n = B - R - m$ ist, und wenn man aus 1) für m sein Gleiches setzt; so ist

2) $n = B - R - (R - A) = B - R - R + A = A + B - 2R$.

3) $p = R - n = R - (A + B - 2R) = 3R - (A + B)$.

4) $q = C - R - p = C - R - [3R - (A + B)] = A + B + C - 4R$.

5) $s = R - q = R - (A + B + C - 4R) = 5R - (A + B + C)$.

6) $t = D - s = D - [5R - (A + (B + C)] = A + B + C + D - 5R$.

7) $u = R - t = R - (A + B + C + D - 5R) = 6R - (A + B + C + D)$.

8) $v = E - u = E - [6R - (A + B + C + D)] = A + B + C + D + E - 6R$.

Fig. 137. 9) $w = R - v = R - (A + B + C + D + E - 6R) =$
$7R - (A + B + C + D + E)$.

Da ferner $w + R + R + x = F$, also $x = F - 2R - w$ ist; so ist

10) $x = F - 2R - [7R - (A + B + C + D + E)] =$
$A + B + C + D + E + F - 9R$

u. s. w.

Aus dem Bisherigen erhellet deutlich genug, nach welchem Gesetze die folgenden Winkel, auch bey einer Figur von mehren Seiten, sich ändern.

II. Von der Bestimmung der Größe der polygonometrischen Hülfslinien.

§. 255.

136. und 137. Da $m = R - A$ ist, so ist $\sin\, m = \sin\, (R - A)$, und es erhellet aus §. 232 für die Bestimmung der trigonometrischen Linien dieser Hülfswinkel, daß

1) $\sin\, m = \sin\, (R - A) = \sin\, (90^\circ - A) = \cos\, A$ ist.

Um aber auch $\sin\, n = \sin\, [(A + B) - 180^\circ]$ zu bestimmen, muß man die im §. 233 entwickelten Gleichungen zu Hülfe nehmen. Setzt man nämlich das dortige $a = (A + B)$, und das dortige $b = 2R = 180^\circ$, so ist

$\sin\, n = \sin\, (A + B) \,.\, \cos\, 180^\circ - \sin\, 180^\circ \,.\, \cos\, (A + B) =$
$- \sin\, (A + B$; weil $\cos\, 180^\circ = -1$ *), und $\sin\, 180^\circ$
$= 0$ ist, vermöge §. 229; also ist

2) $\sin\, n = - \sin\, (A + B)$.

Auf ähnliche Weise bestimmt man auch

3) $\sin\, p = \sin\, [3R - (A + B)] = \sin\, 3R \,.\, \cos\, (A + B) -$
$\sin\, (A + B) \,.\, \cos\, 3R = - \cos\, (A + B)$; weil $\sin\, 3R$
oder $\sin\, 270^\circ = -1$, und $\cos\, 3R = \cos\, 270^\circ = 0$ ist.

Eben so ist

4) $\sin\, q = \sin\, [(A + B + C) - 4R] = \sin\, (A + B + C) \,.\, \cos\, 4R$
$- \sin\, 4R \,.\, \cos\, (A + B + C) = \sin\, (A + B + C)$.

5) $\sin\, s = \sin\, [5R - (A + B + C)] = \sin\, 5R \,.\, \cos\, (A + B + C) -$
$\sin\, (A + B + C) \,.\, \cos\, 5R = \cos\, (A + B + C)$; weil
$\sin\, 5R = \sin\, R = \sin\, 90 = 1$, und $\cos\, 5R = \cos\, R = 0$ ist.

6) $\sin\, t = \sin\, [(A + B + C + D) - 5R] =$
$- \cos\, (A + B + C + D)$. Desgleichen findet man

---

*) Es ist hier durchaus der Halbmesser, oder *sin. tot.* = 1 zum Grunde gelegt.

7) $\sin u = \sin[6R - (A + B + C + D)] =$ Fig.
$\sin(A + B + C + D).$ 136.
8) $\sin v = \sin[(A + B + C + D + E) - 6R] =$ und
$-\sin(A + B + C + D + E).$ 137.
9) $\sin w = \sin[7R - (A + B + C + D + E)] =$
$-\cos(A + B + C + D + E).$
10) $\sin x = \sin[(A + B + C + \ldots + F) - 9R] =$
$-\cos(A + B + C + D + E + F).$

§. 256.

Nun sind wir im Stande, sowohl die Ordinaten als auch ihre entsprechenden Abscissen, ausgedrückt durch die am Umfange bekannten Winkel und Linien, zu bestimmen; es ist nämlich 137.

1) Die erste Ordinate $B1 = a . \sin A.$ Denn im rechtwinkeligen Dreyecke $A1B$ verhält sich

$B1 : AB = \sin A : \sin 90$ (vermög §. 242.)
oder $B1 : a = \sin A : 1$ (§. 239. u. 254.); mithin ist
$B1 = a . \sin A.$

2) Die zweyte Ordinate $C2 = Ca + a2$ ist $= a \sin A - b . \sin(A + B).$

Denn der zweyte Theil $a2$ ist schon bekannt, nämlich $a2 = B1 = a \sin A$, den ersten Ca aber findet man aus dem Dreyecke CaB, in welchem sich verhält

$Ca : BC = \sin n : \sin 90$
oder $Ca : b = \sin - (A + B) : 1$, wenn man für $\sin n$ sein Gleiches aus §. 255. 2) substituirt, und endlich
$Ca = - b \sin(A + B)$ bestimmt.

3) Die dritte Ordinate $D3$ besteht ebenfalls aus zwey Theilen $Db + b3$, letzterer ist schon bestimmt, nämlich $b3 = C2 = a \sin A - b \sin(A + B)$, und ersteren findet man aus dem Dreyecke CbD ganz auf die vorige Art, nämlich $Db = c \sin(A + B + C)$; folglich ist
$D3 = a \sin A - b \sin(A + B) + c \sin(A + B + C).$

4) Da die vierte Ordinate $E4 = D3 = Dd$, und $D3$ schon bekannt ist, sodann aus dem Dreyecke DdE ganz auf die vorige Art das Stück $Dd = d \sin(A + B + C + D)$ bestimmt werden kann; so findet man
$E4 = a \sin A - b \sin(A + B) + c \sin(A + B + C) -$
$d \sin(A + B + C + D).$

Fig. 137. 5) Eben so findet man die fünfte Ordinate $F5 = E4 - eF$. Denn $E4$ ist aus dem Vorigen bekannt, und aus dem rechtwinkeligen Dreyecke FeE findet man

$eF = -e \sin(A + B + C + D + E)$; folglich ist

$$F5 = a \sin A - b \sin(A + B) + c \sin(A + B + C) - d \sin(A + B + C + D) + e \sin(A + B + C + D + E).$$

u. s. w.

a) Dieselben Gleichungen erhält man auch, wenn ein stumpfer, oder selbst ein eingehender oder erhabener Winkel als erster Winkel gewählt, und mit A bezeichnet wird; auch wenn die Abscissenlinie mehre Seiten des Umfanges schneidet, wie bey der 2ten Abtheilung in der Figur zu sehen ist, und wovon man sich leicht überzeugen kann.

§. 257.

Bey dem ersten Anblicke scheint es zwar, als wäre der Ausdruck $a \sin A - b \sin(A + B)$ für die zweyte Ordinate kleiner, als jener $a \sin A$ der ersten Ordinate, weil von dem Ausdrucke für diese, nämlich von $a \sin A = B1 = a2$ etwas (wie es scheint) abgezogen werden soll, da doch die Natur der Sache, nämlich die zweyte Ordinate $C2 = (B1 = a2) + aC$ eine Addition erfordert; allein bey genauerer Untersuchung ist diese angezeigte Subtraction in diesem und ähnlichen Fällen auch wirklich nur scheinbar. Denn aus §. 255 und **Fig. 137.** ist $\sin n = -\sin(A + B)$ gefunden worden, wegen der negativen Lage des Cosinus von 180° (§. 226. 2). Nun aber sind die zwey Winkel $A + B > 180°$,

weil $m = 90 - A$,

und $B = m + 90 + n$, daher auch

$B = 90 - A + 90 + n$ ist (Rk. 40. II.); woraus

$A + B = 180° + n$ folgt (Rk. 224). Es liegt demnach der Sinus des Winkels $A + B$ in dem dritten Quadranten und ist negativ vermög §. 225. 4) und **Fig. 136.** Dieser negative Sinus zeigt als Multiplicator an, daß der vor ihm stehende Multiplicand $-b$ nicht in seiner Bedeutung, sondern in der entgegengesetzten, also positiv genommen werden soll (Rk. 150. 4), so wie es die Natur der Sache hier auch wirklich verlangt: folglich liegt die Eigenschaft der jedes Mahl erforderlichen Addition oder Subtraction der Glieder bey einer jeden Ordinate schon in der Größe und der daraus sich ergebenden Lage der Sinuse selbst. So z. B. wird von der 3ten Ordinate $D3$ ein Stück abzuziehen seyn, um die 4te $E4$ zu erhalten, welches aber schon aus der Eigenschaft der Größe und Lage des Sinus der betreffenden Winkel sich ergibt.

Alles dieses wird bey der wirklichen Entwicklung der Glieder im praktischen Theile noch deutlicher erhellen. Fig. 137.

III. Ableitung der polygonometrischen Hauptgleichungen.

§. 258.

Da nun die Ordinaten nach folgendem Gesetze fortschreiten:

1) $a \sin A$,

2) $a \sin A - b \sin (A + B)$,

3) $a \sin A - b \sin (A + B) + c \sin (A + B + C)$

4) $a \sin A - b \sin (A + B) + c \sin (A + B + C)$
$- d \sin (A + B + C + D)$ u. s. w.

so ist es leicht, dieselben auch für ein Vieleck von mehren Seiten bloß aus diesem Gesetze niederzuschreiben, wobey zu merken ist, daß für den ersten und letzten Punct, nämlich hier in dieser Figur für A und H keine Ordination Statt finden, sondern diese $= 0$ sind. Daraus folgt

die erste Hauptgleichung der Polygonometrie.

Wenn man nämlich in einem Dreyecke ABC was immer für eine Seite AC zur Grundlinie wählt, so ist in demselben die erste Ordinate oder eigentlich die Ordinate für den zweyten Winkel $a \sin A$, die zweyte aber, oder die Ordinate für den dritten Winkel, 138.

$$a \sin A - b \sin (A + B) = 0.$$

In einem Vierecke ist die dritte Ordinate, nämlich: 139.

$$a \sin A - b \sin (A + B) + c \sin (A + B + C = 0.$$

In einem Fünfecke Fig. 140. ist die vierte Ordinate, nämlich 140.

$$a \sin A - b \sin (A + B) + c \sin (A + B + C) -$$
$$d \sin (A + B + C + D) = 0;$$

folglich in einem Sechsecke die fünfte Ordinate

$$a \sin A - b \sin (A + B) + c \sin (A + B + C) -$$
$$d \sin (A + B + C + D) + e \sin (A + B + C + D + E) = 0$$

u. s. w.

Es enthält also jedes Mahl die Ordinate für den letzten Winkel, d. i. diejenige, welche $= 0$ gesetzt werden muß, so viele Glieder weniger Eins, als das Vieleck Seiten oder Winkel hat. Die Zeichen der Glieder wechseln immer so ab, daß das erste Glied positiv, das zweyte negativ, das dritte wieder positiv u. s. w. erscheint. Jedes Glied besteht aus zwey Factoren; der erste Factor ist immer die einer jeden Ordinate nächst anliegende vorhergehende Seite des Polygon, so daß also das erste Glied, oder die erste Ordinate auch die erste

Fig. 140. Seite, das zweyte Glied, die zweyte Seite u. s. w. zum ersten Factor hat; der zweyte Factor eines jeden Gliedes aber ist der Sinus einer Summe von Winkeln, vom ersten Winkel angefangen bis zu jenem einschließig, der mit dem gleichnamigen Buchstaben des ersten Factors des Gliedes bezeichnet ist; z. B. $c . \sin (A + B + C)$, oder $f \sin (A + B + C + D + E + F)$, u. dgl.

§. 259.

137. Zur Bestimmung der den obigen Ordinaten entsprechenden Abscissen, die alle von einem und demselben Puncte, z. B. hier von A an gerechnet werden, dienen gleichfalls wieder die schon oben gebrauchten rechtwinkeligen Dreyecke, und es ist

1) Die erste Abscisse $A1 = a . \cos A$.

Denn im rechtwinkeligen Dreyecke $A1B$ verhält sich

$A1 : AB = \sin m : \sin 90°$

oder $A1 : a = \cos A : 1$ (§. 232. u. 239.);

folglich ist $A1 = a \cos A$.

2) Die zweyte, der Ordinate $C2$ entsprechende Abscisse ist $A2$, und besteht aus zwey Theilen $A1 + 1..2$, wovon der erste schon bekannt, der zweyte $1..2 = Ba$ aber aus dem rechtwinkeligen Dreyecke BaC gefunden wird; denn es verhält sich

$Ba : BC = \sin p : \sin 90°$

oder $Ba : b = - \cos (A + B) : 1$ (§. 255. 3),

also ist $Ba = - b \cos (A + B)$; und folglich

die Abscisse $A2 = A1 + 1..2 = A1 + Ba =$
$a \cos A - b \cos (A + B)$.

3) Die dritte Abscisse $A3$ ist um das Stück $2..3 = Cb$ länger, als ist die erst gefundene zweyte, und Cb wird auf die vorige Art wieder aus dem rechtwinkeligen Dreyecke CbD gefunden; nämlich $Cb = c \cos (A + B + C)$; daher ist

$A3 = A2 + 2..3 = A2 + Cb =$
$a \cos A - b \cos (A + B) + c \cos (A + B + C)$.

4) Bey der vierten Abscisse $A4 = A3 + 3..4$ ist der erste Theil die erst bestimmte dritte Abscisse, und der zweyte Theil $3..4 = dE$ kann eben so wie vorhin aus dem Dreyecke dED gefunden werden; nämlich es ist

$dE = - d \cos (A + B + C + D) = 3..4$; folglich ist

$A4 = a \cos A - b \cos (A + B) + c \cos (A + B + C) -$
$d \cos (A + B + C + D)$.

5) Die fünfte Abscisse $A5 = A4 - 5..4$ ist um das Stück Fig. 137.
$5..4 = eE$ kürzer, als die erst bestimmte vierte. Aus dem rechtwinkeligen Dreyecke eEF wird wieder wie oben
$eE = - e \cos(A+B+C+D+E) = 5..4$ gefunden; mithin ist
$A5 = a \cos A - b \cos(A+B) + c \cos(A+B+C) -$
$d \cos(A+B+C+D) + e \cos(A+B+C+D+E)$.
u. s. w.

Aus dem Gesetze, welches sich hier eben so deutlich wie bey den Ordinaten ausspricht, nur mit dem einzigen Unterschiede, daß dort Sinuse und hier Cosinuse die herrschenden Factoren sind, ist es nun leicht, die Abscissen für ein Vieleck von mehren Seiten fortzusetzen, für wenigere Seiten nach Erforderniß abzubrechen, und auch

die zweyte Hauptgleichung der Polygonometrie

daraus zu folgern: nämlich in einem Dreyecke ist die erste Abscisse 138.
$a \cos A$, und die zweyte, welche zu ihrem Werthe die Seite c hat:
$a \cos A - b \cos(A+B) = c$, oder welches dasselbe und gewöhnlicher ist:

$c = a \cos A - b \cos(A+B)$.

In einem Vierecke ist vermög obigem Gesetze 139.
$d = a \cos A - b \cos(A+B) + c \cos(A+B+C)$.

In einem Fünfecke ist $e = a \cos A - b \cos(A+B)$ 140.
$+ c \cos(A+B+C) - d \cos(A+B+C+D)$.
u. s. w.;

daher ist in unserer Figur 137 aus der ersten Abtheilung 137.

$AH = a \cos A - b \cos(A+B) + c \cos(A+B+C) -$
$d \cos(A+B+C+D) + e \cos(A+B+\ldots+E) -$
$f \cos(A+B+\ldots+F) + g \cos(A+B+\ldots+G)$;

und aus der zweyten Abtheilung ist

$AH = a' \cos A' - b' \cos(A'+B') + c' \cos(A'+B'+C') -$
$d' \cos(A'+B'+\ldots+D') + - \ldots i' \cos(A'+B'$
$+\ldots+I')$;

wobey das in §. 254 Gesagte in Erinnerung zu bringen ist, daß nämlich hier A' den stumpfen Winkel $B'AH$ bezeichnet.

§. 260.

Aus den aufgestellten zwey Hauptgleichungen sind wir nun auch im Stande eine dritte Gleichung abzuleiten, die in der Polygonometrie zur Bestimmung eines unbekannten Winkels, aus den bekannten erforderlichen Stücken, unentbehrlich ist. Sind

Fig. 140. nämlich in einem Polygon, (z. B. in einem Fünfecke) alle Stücke, bis auf eine Seite und die zwey daran liegenden Winkel, bekannt, und man bezeichnet das Polygon so, daß die unbekannte Seite die letzte wird; so kann der links anliegende Winkel durch folgende Gleichung

$tang\, a = \frac{b \sin B - c \sin (B + C) + d \sin (B + C + D)}{a - b \cos B + c \cos (B + C) - d \cos (B + C + D)}$ berechnet werden, deren Richtigkeit aus dem Folgenden erhellet:

Vermög §. 258 gilt für das Fünfeck die Hauptgleichung:
$a \sin A - b \sin (A + B) + c \sin (A + B + C) -$
$d \sin (A + B + C + D) = 0$. Nun aber ist
$\sin (A + B) = \sin A . \cos B + \sin B . \cos A$, vermög §. 233. I.)
und $\sin (A + B + C) = \sin [A + (B + C)] = \sin A . \cos (B + C) +$
$\sin (B + C) . \cos A$;
und $\sin (A + B + C + D) = \sin [A + (B + C + D)] =$
$\sin A . \cos (B + C + D) + \sin (B + C = D) . \cos A$.

Substituirt man diese Werthe in die vorstehende Hauptgleichung, so erhält man
$a \sin A - b (\sin A . \cos B + \sin B . \cos A) +$
$c [\sin A . \cos (B + C) + \sin (B + C) . \cos A] -$
$d [\sin A . \cos (B + C + D) + \sin (B + C + D) . \cos A] = 0$;
verrichtet man die Multiplication mit den außer den Klammern stehenden Factoren, so erhält man weiter:
$a \sin A - b \sin A . \cos B - b \sin B . \cos A +$
$c \sin A . \cos (B + C) + c \sin (B + C) . \cos A -$
$d \sin A . \cos (B + C + D) - d \sin (B + C + D) . \cos A = 0$.

Läßt man nun alle Glieder, welche den Factor $\sin A$ haben, links, und überträgt die übrigen mit veränderten Zeichen auf die rechte Seite, so erhält man ferner:
$a \sin A - b \sin A . \cos B + c \sin A . \cos (B + C) -$
$d \sin A . \cos (B + C + D) = b \sin B . \cos A -$
$c \sin (B + C) . \cos A + d \sin (B + C + D) . \cos A$;
und nach Zerlegung in Factoren ist
$\sin A [a - b \cos B + c \cos (B + C) - d \cos (B + C + D)] =$
$\cos A [b \sin B - c \sin (B + C) + d \sin (B + C + D)]$.

Dividirt man endlich den zweyten Theil der Gleichung durch den zweyten Factor des ersten Theils, den ersten Theil der Gleichung aber durch den ersten Factor des zweyten Theils; so entsteht vermög §. 230. II. und 239 die gesuchte Gleichung $\frac{\sin A}{\cos A} =$

$$\tan A = \frac{b \sin B - c \sin(B+C) + d \sin(B+C+D)}{a - b \cos B + c \cos(B+C) - d \cos(B+C+D)}.$$ Fig. 137.

Diese Gleichung läßt sich nach Erforderniß erweitern oder abbrechen; denn das in derselben herrschende Gesetz liegt klar vor Augen. Sie wird für unsere Figur 137, wenn in derselben alle Winkel und Linien am Umfange bekannt, die Diagonale AH aber und ihre zwey anliegenden Winkel in der ersten Abtheilung unbekannt sind, folgende Verlängerung fordern:

$$\tan A = \frac{\text{Zähler.}\left\{\begin{array}{l} b \sin B - c \sin(B+C) + d \sin(B+C+D) \\ - e \sin(B+C+D+E) + f \sin(B+C+\ldots+F) \\ - g \sin(B+C+D+E+F+G). \end{array}\right.}{\text{Nenner.}\left\{\begin{array}{l} a - b \cos B + c \cos(B+C) - d \cos(B+C+D) \\ + e \cos(B+C+D+E) - f \cos(B+C+\ldots+F) \\ + g \cos(B+C+D+E+F+G). \end{array}\right.}$$

Sobald der Winkel A bekannt ist, kann man nach §. 252 auch den Winkel $H = GHA$, sodann nach §. 258 und 259 die Ordinaten und Abscissen, d. i. die Linie AH zugleich bestimmen, wie bey der Anwendung im praktischen Theile sodann erhellen wird.

§. 261.

Die Lösung folgender Aufgaben möge den Anfängern zur nützlichen Übung dienen.

1) Die Größe des Fehlers anzugeben, wenn man von einem Standpunkte nach einem $m = 260$ Klftern entfernten, um $n = 2$ Fuß seitwärts aus der Vertikalrichtung gewichenen Objecte visirt. (nach §. 248).

2) In einem Parallelogramm ist ein Winkel und eine anliegende Seite nebst derjenigen Diagonale gegeben, welche durch den Winkel geht; man soll die Seite finden, welche mit der bekannten Seite den gegebenen Winkel einschließt? (nach §. 242).

3) Die Länge einer Diagonale eines Parallelogrammes zu bestimmen, dessen eine Seite $a = 418$, die andere anliegende $b = 190$ Klftr. und einer der spitzigen Winkel $m = 36° \; 8' \; 12''$ bekannt ist; (nach §. 244).

4) Wie groß ist der Unterschied zwischen Bogen und Sehne unserer Erde, wenn die Länge des Bogens $= 4000$, und der Halbmesser der Erde $= 3356612$ Wiener Klaftern beträgt? (nach §. 16 und 242).

Fig. 5) Aus vier nach einander folgenden bekannten Stücken eines Trapezes, die übrigen Stücke und den Flächeninhalt desselben zu finden; (nach §. 242, 244 und 246).

6) Aus zwey an einander liegenden Seiten und zwey gegenüber liegenden Winkeln eines Trapezes, die übrigen Stücke und den Flächeninhalt desselben zu bestimmen; (nach §. 242 bis 246).

Dritter Abschnitt.

Aufstellung einiger trigonometrischen Formeln, und Anwendung derselben zu Rechnungs-Vortheilen.

I. Ableitung der nützlichsten trigonometrischen Formeln.

§. 262.

Wenn man den Halbmesser $r = sin. tot. = 1$ setzt, so erhalten die §. 230, 233 und 334 aufgestellten trigonometrischen Formeln folgende Gestalt.

Aus §. 230 findet man:

1) $sin^2 a + cos^2 a = 1.$

2) $sin\ a = \sqrt{(1 - cos^2 a)}$; oder $sin^2 a = 1 - cos^2 a.$

3) $cos\ a = \sqrt{(1 - sin^2 a)}$; oder $cos^2 a = 1 - sin^2 a.$

4) $tang\ a = \frac{1}{cot\ a} = \frac{sin\ a}{cos\ a}.$

5) $cot\ a = \frac{1}{tang\ a} = \frac{cos\ a}{sin\ a}.$

6) $sec\ a = \frac{1}{cos\ a} = \sqrt{(1 + tang^2 a)}.$

7) $cosec\ a = \frac{1}{sin\ a} = \sqrt{(1 + cot^2 a)}.$

Aus §. 233:

8) $sin\ (a + b) = sin\ a . cos\ b + sin\ b . cos\ a$

Fig.

9) $\sin(a-b) = \sin a . \cos b - \sin b . \cos a.$

10) $\cos(a+b) = \cos a . \cos b - \sin a . \sin b.$

11) $\cos(a-b) = \cos a . \cos b + \sin a . \sin b.$

Aus §. 234 folgen ferner:

12) $\sin 2a = 2 \sin a . \cos a.$

13) $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1.$

14) $\cos \frac{1}{2} a = \sqrt{\left(\frac{1+\cos a}{2}\right)}.$

15) $\cos a = 2\cos^2 \frac{1}{2} a - 1$; mithin

16) $1 + \cos a = 2\cos^2 \frac{1}{2} a.$

17) $\sin \frac{1}{2} a = \sqrt{\left(\frac{1-\cos a}{2}\right)}$; oder $\sin^2 \frac{1}{2} a = \frac{1-\cos a}{2}.$

Vermöge der Formeln 4), 8) und 9) ist

$$\tang(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\sin a . \cos b + \sin b . \cos a}{\cos a . \cos b - \sin a . \sin b};$$

dividirt man Zähler und Nenner durch $\cos a . \cos b$, und reducirt gehörig; so erhält man

18) $\tang(a+b) = \frac{\tang a + \tang b}{1 - \tang a . \tang b}$. Eben so findet man

19) $\tang(a-b) = \frac{\tang a - \tang b}{1 + \tang a . \tang b}$. Desgleichen ist

20) $\cot(a+b) = \frac{1 - \tang a . \tang b}{\tang a + \tang b}$, und

21) $\cot(a-b) = \frac{1 + \tang a . \tang b}{\tang a - \tang b}$, wenn man nämlich

für $\cot(a+b) = \frac{1}{\tang(a+b)} = 1 : \tang(a+b)$, und

für $\cot(a-b) = \frac{1}{\tang(a-b)} = 1 : \tang(a-b)$ aus

den Formeln 18) und 19) substituirt.

Werden die Formeln 8) und 9) addirt, und auch von einander abgezogen, so erhält man

22) $\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2 \sin a . \cos b$, und

23) $\sin(a+b) - \sin(a-b) = 2 \sin b . \cos a.$

Fig. Nimmt man dieses auch mit den Formeln 10) und 11) vor, so erhält man

24) $\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos a.\cos b$, und

25) $\cos(a+b) - \cos(a-b) = 2\sin a.\sin b$.

Setzt man $a + b = p$
und $a - b = q$

so ist $2a = p + q$, wenn man beyde Gleichungen addirt; folglich ist $a = \frac{p+q}{2} = \frac{1}{2}(p+q)$, und wenn man die untere Gleichung von der obern abzieht, so ist $2b = p - q$; mithin ist $b = \frac{p-q}{2} = \frac{1}{2}(p-q)$. Substituirt man diese Werthe für $a+b$, und $a-b$, sodann für a und b in die Formeln 22), 23), 24) und 25), so verwandeln sie sich nach der Ordnung in folgende:

26) $\sin p + \sin q = 2\sin\frac{1}{2}(p+q).\cos\frac{1}{2}(p-q)$.

27) $\sin p - \sin q = 2\cos\frac{1}{2}(p+q).\sin\frac{1}{2}(p-q)$.

28) $\cos p + \cos q = 2\cos\frac{1}{2}(p+q).\cos\frac{1}{2}(p-q.)$

29) $\cos p - \cos q = 2\sin\frac{1}{2}(p+q).\sin\frac{1}{2}(p-q)$.

Dividirt man die Formel 26) durch die Formel 27), so erhält man

30 $\frac{\sin p + \sin q}{\sin p - \sin q} = \frac{\sin\frac{1}{2}(p+q).\cos\frac{1}{2}(p-q)}{\cos\frac{1}{2}(p+q).\sin\frac{1}{2}(p-q)} =$

$\tan\frac{1}{2}(p+q).\cot\frac{1}{2}(p-q)$.

Eben so erhält man aus 28) und 29)

31) $\frac{\cos p + \cos q}{\cos p - \cos q} = \cot\frac{1}{2}(p+q).\cot\frac{1}{2}(p-q)$.

Auf eben diese Art findet man aus den Formeln 26) und 28)

32) $\frac{\sin p + \sin q}{\cos p + \cos q} = \frac{\sin\frac{1}{2}(p+q).\cos\frac{1}{2}(p-q)}{\cos\frac{1}{2}(p+q).\cos\frac{1}{2}(p-q)} = \tan\frac{1}{2}(p+q)$.

Desgleichen aus 29) und 27) auch

33) $\frac{\cos p - \cos q}{\sin p - \sin q} = \tan\frac{1}{2}(p+q) = \frac{\sin p + \sin q}{\cos p + \cos q}$; wegen 32).

Aus den Formeln 27) und 28) findet man ferner

34) $\frac{\sin p - \sin q}{\cos p + \cos q} = \tan\frac{1}{2}(p-q)$.

Setzt man in den Formeln 14) und 17) anstatt $a = 90° - c$; so wird Fig.

35) $\cos(45° - \frac{1}{2}c) = \sqrt{\left(\frac{1 + \sin c}{2}\right)}$

36) $\sin(45° - \frac{1}{2}c) = \sqrt{\left(\frac{1 - \sin c}{2}\right)}$

wegen $\cos(90 - c) = \sin c$, im §. 232.

In der Formel 34) für $q = 0$ gesetzt, so wird

37) $\tang \frac{1}{2} p = \frac{\sin p}{1 + \cos p} = \frac{1 - \cos p}{\sin p}$, wegen 33); daraus folgt

38) $1 - \cos p = \sin p . \tang \frac{1}{2} p$.

Und wegen $\cot \frac{1}{2} p = \frac{1}{\tang \frac{1}{2} p} = 1 : \tang \frac{1}{2} p$, u. s. w. findet man

39) $\cot \frac{1}{2} p = \frac{1 + \cos p}{\sin p} = \frac{\sin p}{1 - \cos p}$, wenn man aus 37) gehörig substituirt; hieraus findet man endlich:

40) $1 + \cos p = \sin p . \cot \frac{1}{2} p$.

a) Dieß sind zwar nicht alle, jedoch bey weitem die brauchbarsten trigonometrischen Formeln, aus denen sich nöthigen Falls durch die verschiedenen Verbindungen der Addition, Subtraction, Multiplication, Division und Substitution derselben noch eine große Menge ableiten ließe. Wir wollen nur noch folgende sehr brauchbare Formeln entwickeln, und zugleich einige Anwendungen der vorhergehenden zeigen.

II. Anwendung dieser Formeln.

§. 263.

Wenn m und n zwey große Zahlen vorstellen; so sind die Ausdrücke $\sqrt{(m^2 + n^2)}$ und $\sqrt{(m^2 - n^2)}$ nach dem gewöhnlichen Wege, besonders ersterer, da er sich nicht wie der letztere in Factoren zerlegen läßt, etwas beschwerlich zu entwickeln.

A) Es läßt sich aber jeder dieser Ausdrücke durch die Sinustafeln, und folglich logarithmisch bestimmen.

Denn es ist $\sqrt{(m^2 + n^2)} = \sqrt{\left[m^2 \left(\frac{m^2 + n^2}{m^2}\right)\right]} = m \sqrt{\left(1 + \frac{n^2}{m}\right)}$, vermög Nr. 158 und 212.

Fig. Nun setze man die Tangente eines gewissen Winkels oder Bogens $q = \frac{n}{m}$, nämlich $tang\ q = \frac{n}{m}$; so wird $tang^2\ q = \frac{n^2}{m^2}$, und man findet ferner

$$\sqrt{\left(1 + \frac{n^2}{m^2}\right)} = \sqrt{(1 + tang^2\ q)} = sec\ q = \frac{1}{cos\ q}, \text{(§. 262. 6.)};$$

und da $m \sqrt{\left(1 + \frac{n^2}{m^2}\right)} = m \cdot \frac{1}{cos\ q} = \frac{m}{cos\ q}$, (Rk. 63. I.), so wie $m \sqrt{\left(1 + \frac{n^2}{m^2}\right)} = \sqrt{(m^2 + n^2)}$ ist; so ist auch

$\sqrt{(m^2 + n^2)} = \frac{m}{cos\ q}$; und es läßt sich sowohl $tang\ q = \frac{n}{m}$, als auch $\frac{m}{cos\ q}$ logarithmisch entwickeln; es ist nämlich

1) $L\ tang\ q = L n - L m$, und sodann

2) $L \sqrt{(m^2 + n^2)} = L m - L\ cos\ q$.

a) Diese zwey Gleichungen finden ihre vortheilhafte Anwendung bey Bestimmung der Hypothenuse aus den gegebenen zwey Katheten eines rechtwinkeligen Dreyeckes, wenn diese große Zahlen sind.

B) Eben so kann auch $\sqrt{(m^2 - n^2)}$ vermittelst der Sinustafeln logarithmisch entwickelt werden.

Denn es ist $\sqrt{(m^2 - n^2)} = m \sqrt{\left(1 - \frac{n^2}{m^2}\right)}$, vermög des Obigen in A).

Ist nun $m > n$, so ist $\frac{n^2}{m^2} < (1$ Rk. 181. 1); daher kann, wenn man den $sin.\ tot. = 1$ setzt, der Bruch $\frac{n}{m}$ jederzeit als der Sinus eines gewissen Bogens oder Winkels angesehen werden; bezeichnet man nämlich diesen Bogen mit q, so kann man jedes Mahl $sin\ q = \frac{n}{m}$, und daher $sin^2\ q = \frac{n^2}{m^2}$ setzen; und es ist ferner

$$\sqrt{\left(1 - \frac{n^2}{m^2}\right)} = \sqrt{(1 - sin^2\ q)} = cos\ q \text{ vermöge §. 262. 3.)};$$

Da $m \sqrt{\left(1 - \frac{n^2}{m^2}\right)} = m\ cos\ q$, und vermög Obigen auch

$m \sqrt{\left(1 - \frac{n^2}{m^2}\right)} = \sqrt{(m^2 - n^2)}$ ist; so ist

$\sqrt{(m^2 - n^2)} = m\ cos\ q$; endlich ist

3) $L\ sin\ q = L\ n - L\ m$, und sodann

4) $L \sqrt{(m^2 - n^2)} = L\ m + L\ cos\ q$.

Daß man bey der Voraussetzung $m > n$, daher $\frac{n}{m} < 1$ jeder- Fig.
zeit den Bruch $\frac{n}{m} = \sin q$ setzen kann, ist für sich klar; denn setzt man den *sin. tot.* $= 1$, so sind alle übrigen Sinuse < 1; folglich können sie in Theilen des *sin. tot.* ausgedrückt werden (§. 225. 1). Daß aber auch bey jedem positiven Werthe von m und n, es möge übrigens m größer oder kleiner als n seyn, jederzeit $\tan q = \frac{n}{m}$ gesetzt werden kann, erhellet daraus, weil die Tangenten von $0° =$ Null, und von $90° = \infty$ sind; daher es zwischen Null und einer unendlich großen Größe gewiß einen Werth, das ist, eine Tangente gibt, die $= \frac{n}{m}$ ist. Wir wollen sogleich eine vortheilhafte Anwendung dieser Formeln zeigen.

§. 264.

Aufgabe. Es seyen im Dreyecke ABC die Seiten $AB = a =$
231, $AC = b = 162$, und der eingeschlossene Winkel $A = 30°$ 134.
$58'$ gegeben; man soll die dritte Seite BC finden.

Auflösung. Man fälle aus C die Senkrechte CD auf AB, so verhält sich im rechtwinkeligen Dreyecke ACD, wenn man den $\sin 90° = \sin. tot. = 1$ setzt,

$AC : CD = 1 : \sin A$

oder $b : CD = 1 : \sin A$; daher ist $CD = b . \sin A$.

und $AC : AD = 1 : \cos A$, daher ist $AD = b . \cos A$ (§. 242. 2); folglich ist $DB = AB - AD = a - b \cos A$. Im rechtwinkeligen Dreyecke CDB ist ferner

$BC^2 = CD^2 + DB^2 = b^2 \sin^2 A + (a - b \cos A)^2 =$
$b^2 \sin^2 A + a^2 - 2\,ab \cos A + b^2 \cos^2 A =$
$b^2 (\sin^2 A + \cos^2 A) + a^2 - 2\,ab \cos^2 A$; und weil $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ ist vermöge §. 262. 1): so ist auch
$BC^2 = b^2 + a^2 - 2\,ab \cos A$.

Vermittelst dieser Gleichung könnte man aus zwey gegebenen Seiten und dem eingeschlossenen Winkel eines Dreyeckes die dritte Seite unmittelbar berechnen; wobey aber die Ausziehung der Quadratwurzel ziemlich beschwerlich wäre; um daher diese Gleichung für die logarithmische Bearbeitung einzurichten, finden wir ferner noch

$BC^2 = b^2 + 2\,ab + a^2 - 2\,ab - 2\,ab . \cos A$ (vermög Rk. 146.)
oder $BC^2 = (b + a)^2 - 2\,ab\,(1 + \cos A)$; nun ist $1 + \cos A = 2 \cos^2 \frac{1}{2} A$, vermöge §. 262. 16).
also auch $BC^2 = (b + a)^2 - 4\,ab . \cos^2 \frac{1}{2} A$;
folglich $BC = \sqrt{[(b + a)^2 - 4\,ab . \cos^2 \frac{1}{2} A]}$.

Fig. 134. Setzt man nun in dem vorigen §. 263. unter B) anstatt $m^2 = (b+a)^2$, so wird $m = (b+a)$, und für $n^2 = 4ab.\cos^2\frac{1}{2}A$,

so ist $n = \sqrt{4ab.\cos^2\frac{1}{2}A} = 2\cos\frac{1}{2}A\sqrt{ab}$

daher ist $\frac{n}{m} = \frac{2\cos\frac{1}{2}A\sqrt{ab}}{a+b} = \sin q$ .... (A)

und $BC = \sqrt{(m^2 - n^2)} = m.\cos q = \sqrt{[(a+b)^2 - 4ab.\cos^2\frac{1}{2}A]} = (a+b).\cos q$;

es ist nämlich $BC = (a+b).\cos q$ .... (B)

Sodann findet man aus (A)

1) $L\sin q = L\,2 + L\cos\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}(L\,a + L\,b) - L(a+b)$.

Ist nun q gefunden, so ist endlich aus (B)

2) $L\,BC = L(a+b) + L\cos q$.

Substituirt man die oben gegebenen Werthe, so ist aus 1):

$$L\,2 = 0{,}301030$$
$$L\cos\tfrac{1}{2}A = L\cos(15^\circ\ 29') = 9{,}983946 - 10, \text{ vermög §. 240.}$$
$$\tfrac{1}{2}(L\,231 + L\,162) = 2{,}293363$$
$$12{,}578339 - 10$$
$$\text{abgezog. } L(a+b) = L\,393 = 2{,}594393$$
$$9{,}983946 - 10$$
$$+ 10 \text{ .... vermöge §. 240.}$$
$$\text{folglich ist } L\sin q = 9{,}983946$$
$$\text{und endlich } q = 74^\circ\ 31'.$$

Eigentlich ist es nicht nöthig, die Anzahl der Grade, Minuten rc. des Winkels q aus der Tafel heraus zu schreiben, sondern man kann anstatt diesen auf demselben Blatte, in derselben Querzeile gleich den $L\cos q$ zu dem oben schon bekannten $L(a+b)$ hinzu setzen, und addiren; es ist nämlich, ferner vermöge der Gleichung 2):

$$L(a+b) = 2{,}594393, \text{ und}$$
$$L\cos q = L\cos(74^\circ\ 31') = 9{,}426443 - 10$$
$$\text{also ist } L\,BC = 2{,}020836$$
$$\text{daraus folgt die Seite } BC = 104{,}91.$$

Es ist augenscheinlich, daß man durch diese Rechnung aus zwey gegebenen Seiten und dem eingeschlossenen Winkel die dritte Seite eines Dreyeckes viel schneller erhält, als wenn man nach §. 245 erst die Winkel, und sodann nach (§. 242) die dritte Seite bestimmt.

§. 265.

Fig. 134.

Wenn man in die §. 264 aufgestellte Gleichung $BC^2 = b^2 + a^2 - 2ab.\cos A$, für die Seite $BC = c$ setzt, so ist $c^2 = b^2 + a^2 - 2ab.\cos A$, und man findet daraus ferner

$\cos A = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$; und da vermöge §. 262. 15)

$\cos A = 2\cos^2 \frac{1}{2}A - 1$ ist; so ist auch

$$2\cos^2 \tfrac{1}{2}A - 1 = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab},$$

und $2\cos^2 \frac{1}{2}A = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} + 1 = \frac{a^2+b^2-c^2+2ab}{2ab}$

oder $ab.\cos^2 \frac{1}{2}A = \frac{(a+b)^2-c^2}{4ab} = \frac{(a+b+c)}{2}\frac{(a+b-c)}{2}$, vermöge Rk. 159. 3).

Setzt man nun die halbe Summe aller drey Seiten, nämlich $\frac{a+b+c}{2} = S$,

so ist der Factor $\frac{a+b-c}{2} = S - c$. Denn es ist (vermög Rk. 146.)

$\frac{a+b-c}{2} = \frac{a+b-c}{2} + c - c = \frac{a+b-c+2c}{2} - c = \frac{a+b+c}{2} - c = S - c$; substituirt man diese Werthe in die letzte Gleichung, so ist

$$ab.\cos^2 \tfrac{1}{2}A = S(S-c),$$

$$\text{und } \cos^2 \tfrac{1}{2}A = \frac{S(S-c)}{ab};$$

daher ist $\cos \frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(S\,S-c)}{ab}}$; und folglich

1) $L\cos \frac{1}{2}A = \frac{1}{2}[LS + L(S-c) - (La + Lb)]$.

In der obigen Gleichung

$\cos A = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ findet man ferner

$-\cos A = \frac{c^2-a^2-b^2}{2ab}$ vermög Rk. 224. 3)

$1 - \cos A = \frac{c^2-a^2-b^2}{2ab} + 1$ (Rk. 47. I.); ferner

$1 - \cos A = \frac{c^2-a^2-b^2+2ab}{2ab} = \frac{c^2-(a^2-2ab+b^2)}{2ab}$,

$\frac{1-\cos A}{2} = \frac{c^2-(a-b)^2}{4ab}$, vermög (Rk. 72. I.); sodann

$\sin^2 \frac{1}{2} A = \frac{c^2 - (a-b)^2}{4ab}$, vermöge §. 262. 17), hierauf

Fig. 134. $ab \cdot \sin^2 \frac{1}{2} A = \frac{(c+a-b)}{2} \frac{(c+b-a)}{2}$ vermöge Nr. 159. 4); und wenn man wieder die halbe Summe alle drey Seiten, nämlich $\frac{a+b+c}{2} = S$ setzt, so ist

$\frac{c+a-b}{2} = S - b$, und $\frac{c+b-a}{2} = S - a$, und daher

$ab \cdot \sin^2 \frac{1}{2} A = (S-b)(S-a)$; folglich auch

$\sin \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(S-b)(S-a)}{ab}}$; und endlich ist

2) $L \sin \frac{1}{2} A = \frac{1}{2} [L(S-b) + L(S-a) - (La + Lb)]$.

Durch Hülfe dieser zwey Gleichungen kann aus den gegebenen drey Seiten eines Dreyeckes der Winkel, welcher von den zwey Seiten a und b eingeschlossen ist, durch die Rechnung sehr leicht gefunden werden. Nur ist dabey zu bemerken, daß, wenn der zu suchende Winkel sehr spitzig ist, die Gleichung 2), wenn er aber ein sehr stumpfer Winkel ist, die Gleichung 1) ausschließend genommen werden muß, weil die Sinuse bey 90°, die Cosinuse hingegen nahe gegen 0° unbedeutende Unterschiede geben, wovon man sich in den Sinustafeln sehr leicht überzeugen kann.

§. 266.

1. Aufgabe. Aus den gegebenen drey Seiten $AB = a = 700$, $AC = b = 400$, und $BC = c = 310$ eines Dreyeckes die Winkel desselben zu bestimmen.

Auflösung. Es ist $\frac{a+b+c}{2} = S = 705$, sodann $S - b = 305$, und $S - a = 5$; daher nach der Gleichung §. 265. 2)
$L \sin \frac{1}{2} A = \frac{1}{2} (L\, 305 + L\, 5 - L\, 700 - L\, 400)$.

Nun ist $L\, 305 = 2{,}484300$
$L\, 5 = 0{,}698970$

3,183270
oder 7,183270 — 4 (Nr. 345. 5),

abgezogen { $L\, 700 = 2{,}845098$
$L\, 400 = 2{,}602060$ }

und (1,736112 — 4) : 2 gibt
0,868056 — 2

hierzu + 10 . . . . . . vermöge §. 240. Fig.

so ist $L\,sin\,\frac{1}{2}\,A = 8{,}868056$ 134.

folglich $\frac{1}{2}\,A = 4^\circ\ 13'\ 56''$

und endlich $A = 8^\circ\ 27'\ 52''$

Auf gleiche Weise findet man den Winkel $B = 70^\circ\ 56'\ 56''$

und $C = 160\ 35\ 12$

Es ist gar kein Zweifel, daß diese Rechnung, aus den gegebenen drey Seiten eines Dreyeckes einen Winkel zu finden, weit kürzer und bequemer ist, als nach dem §. 246 aufgestellten Satze.

2. Aufgabe. Aus den gegebenen drey Seiten eines Dreyeckes den Flächeninhalt $= F$ zu finden.

Auflösung. Es sey die Seite $AB = a = 270$, $AC = b = 180$, und $BC = c = 150$; man denke sich die Höhe CD, so ist für *sin. tot.* $= 1$ die Höhe $CD = b\,.\,sin\,A$, vermöge §. 264; daher ist die Fläche $F = \frac{1}{2}\,a\,.\,b\,.\,sin\,A = \frac{ab}{2}\,.\,sin\,A$ . . . . (A).

Nun ist $cos\,A = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$; vermöge §. 265,

und $1 + cos\,A = 1 + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{(a + b^2) - c^2}{2ab}$ (Rk. 47. I.);

nämlich $\frac{1 + cos\,A}{2} = \frac{(a + b + c)\ (a + b - c)}{4ab} = \frac{S\,.\,(S - c)}{ab}$

wegen §. 265.; es ist auch

$$\frac{1 - cos\,A}{2} = \frac{c^2 - (a - b)^2}{4ab} = \frac{(c + b - a)\ c\,(+ a - b)}{4ab} = \frac{(S - a)\ (S - b)}{ab}$$

---

daher $\frac{(1 + cos\,A)}{2}\,\frac{(1 - cos\,A)}{2} = \frac{S\ (S - c)\ (S - a)\ (S - b)}{a^2\ b^2}$,

vermöge Rk. 63. Grunds. I.

oder $\frac{1^2 - cos^2\,A}{4} = \frac{S\ (S - a)\ (S - b)\ (S - c)}{a^2\ b^2}$, Rk. 158. 4),

und $1 - cos^2\,A = \frac{4\,.\,S\ (S - a)\ (S - b)\ (S - c)}{a^2\ b^2}$,

und $sin^2\,A = \frac{4\,.\,S\ (S - a)\ (S - b)\ (S - c)}{a^2\ b^2}$ vermöge §. 262. 2);

folglich ist $sin\,A = \frac{2}{ab}\,\sqrt{[S\,(S - a)\ (S - b)\ (S - c)]}$.

Setzt man nun diesen Werth für *sin A* in die Gleichung (A);

Fig. 134. so ist $F = \frac{ab}{2} \cdot \frac{2}{ab} \sqrt{[S(S-a)(S-b)(S-c)]}$; es ist nämlich der Flächeninhalt

$$F = \sqrt{[S(S-a)(S-b)(S-c)]}, \text{ und}$$

$$L F = \tfrac{1}{2}[L S + L(S-a) + L(S-b) + L(S-c)]$$

Nun ist $S = \frac{a+b+c}{2} = \frac{270+180+150}{2} = 300$

$$\begin{aligned} \text{daher } L S &= L\ 300 = 2{,}477121 \\ L(S-a) &= L\ \ 30 = 1{,}477121 \\ L(S-b) &= L\ 120 = 2{,}079181 \\ L(S-c) &= L\ 150 = \underline{2{,}176091} \\ & \qquad (8{,}209514) : 2 \\ L F &= 4{,}104757, \end{aligned}$$

folglich ist $F = 12727{,}9\ q^{\circ}$ = dem Flächeninhalte des Dreyeckes.

Auch hier liegt der Vortheil dieser Rechnung in Vergleichung mit jener §. 247. 2) klar vor Augen.

§. 267.

Die folgenden zwey Tabellen enthalten alle Fälle, die bey der Auflösung der geradlinigen Dreyecke vorkommen können.

I. Auflösung der rechtwinkeligen Dreyecke, wobey die Hypothenuse mit h, die eine Kathete durch a, und der ihr gegenüber liegende Winkel mit A; die andere Kathete mit b, und der ihr gegenüber stehende Winkel mit B, endlich der $sin\ 90°$ durch r bezeichnet ist.

Gegeben sind		Gesucht wird		Gleichung	Die Gleichung erhält man aus
Die Katheten	a, b	die Hypothenuse	h	$h = \sqrt{(a^2 + b^2)}$ oder $\frac{b}{a} = tang\ m$, und sodann ist $h = \sqrt{(a^2 + b^2)} = \frac{a}{cos\ m}$	§. 89. und §. 263. *A.*
		der Seite a gegenüber liegende Winkel	A	$tang\ A = \frac{r\ .\ a}{b}$, oder $cot\ A = \frac{r\ .\ b}{a}$.	§. 248.
Die Hypothenuse und eine Kathete	h, a	die 2te Kathete	b	$b = \sqrt{(h^2 - a^2)} = \sqrt{(h + a)\ (h - a)}$	§. 89.
		der gegenüber lieg. Winkel	A	$sin\ A = \frac{r\ .\ a}{h}$	
		d. anl. Wink.	B	$cos\ B = \frac{r\ .\ a}{h}$	
Die Hypothenuse und ein Winkel	h, A	die gegenüber steh. Kathete	a	$a = \frac{h\ .\ sin\ A}{r}$	§. 242. 2).
		die anliegende Kathete	b	$b = \frac{h\ .\ cos\ A}{r}$	
Eine Kathete und ein Winkel	a, A oder a, B	die Hypothenuse	h	$h = \frac{r\ .\ a}{sin\ A} = \frac{r\ .\ a}{cos\ B}$	
		die 2te Kathete	b	$b = \frac{a\ cot\ B}{r} = \frac{a\ .\ tang\ B}{r}$	§. 248.

II. Auflösung der schiefwinkeligen Dreyecke, wobey die Seiten durch
Seite *b* gegenüber stehende Winkel mit *B*, und der Seite *c* gegenüber
sin 90° durch 1 bezeichnet sind; daher hat man sich bey dem Gebrauche

Gegeben sind		Gesucht wird	
Drey Seiten	$a, b, c,$	der Seite a gegenüber liegende Winkel	A
		der Flächeninhalt	F
Zwey Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel	a, b, C	die dritte Seite	c
		die beyden Winkel	A und B
		der Flächeninhalt	F
Zwey Winkel mit der eingeschlossenen Seite	$A, B, c,$	die dem Winkel A gegenüber stehende Seite	a
		der Flächeninhalt	F
Zwey Seiten mit einem gegenüberliegenden Winkel	$a, b, B,$	die dritte Seite	c
		der eingeschlossene Winkel	C
		der gegenüber liegende Winkel	A
		der Flächeninhalt.	F

a, b, und c, der Seite a gegenüber liegende Winkel aber mit A, der liegende Winkel durch C, der Flächenraum durch F, und endlich dieser Formeln an das §. 240. Gesagte zu erinnern.

Vorbereitung	Gleichung.	Die Gleichung erhält man vermöge
$\frac{a+b+c}{2} = S$	$\cos \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{S.(S-a)}{bc}}$ $\sin \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(S-c)\,(S-b)}{bc}}$ $\cos A = \frac{c^2+b^2-a^2}{2\,bc}$	§. 265.
	$F = \sqrt{S(S-a)\,(S-b)\,(S-c)}$	§. 266. 2)
$\sin q = \frac{2 \cos \frac{1}{2} C \sqrt{a\,b}}{a+b}$	$c = (a+b).\cos q.$	§. 264.
$A > B.$ $\frac{(180-C)}{2} = \frac{A+B}{2} = m$ und $\frac{A-B}{2} = n$	$\tan n = \frac{(a-b).\tan m}{a+b}$ sodann ist $A = m + n$ und $B = m - n$	§. 244.
	$F = \frac{1}{2}\,a.b.\sin C.$	§. 245. 2)
	$a = \frac{c.\sin A}{\sin (A+B)}$	
	$F = \frac{c^2.\sin A.\sin B}{2.\sin (A+B)}$	
$\sin A = \frac{a.\sin B}{b}.$ Es ist $A < 90°$ wenn $a < b$ ist; sonst ist es zweifelhaft, (§. 225. 4)	$c = \frac{b.\sin (A+B)}{\sin B}$ $C = 180° - (A+B)$ $\sin A = \frac{a.\sin B}{b}$ $F = \frac{1}{2}\,a.b.\sin (A+B)$	§. 242. und §. 225. 1)

Fünftes Hauptstück.

Von den vorzüglichsten Kegelschnitts-Linien, den Anfangsgründen der Differenzial- und Integral-Rechnung.

Erster Abschnitt.

Fig. 141.

Die Kegelschnitts-Linien.

§. 268.

Ein senkrechter Kegel kann mittelst einer ebenen Fläche auf fünferley Weise geschnitten werden:

1) Der vertikale Schnitt durch seine Achse ist ein geradliniges Dreyeck, das Achsendreyeck *KNR*.

2) Der Schnitt senkrecht auf seine Achse, oder parallel zur Grundfläche des Kegels geführt, gibt auf der Oberfläche desselben eine krumme Linie, und zwar die Kreislinie *EMFwE* vermög §. 173. 4).

3) Wird der Schnitt parallel zu einer Seite des Kegels geführt, so entsteht auf der Oberfläche desselben eine krumme Linie *CAB*, die Parabel genennt wird; ihre Schenkel *AC* und *AB* entfernen sich bey ihrer Verlängerung immer mehr von einander.

4) Der Schnitt, welcher mit der Achse des Kegels einen beliebigen Winkel bildet, und durch den ganzen Kegel geführt wird, gibt eine in sich geschlossene krumme Linie *AMBtA*, die Ellipse heißt;
143. endlich

5) wird der Schnitt mit der Achse des Kegels parallel geführt, so entsteht auf seiner Oberfläche die krumme Linie *FGH*, welche man Hyperbel nennt; denkt man sich die Durchschnittsebene genugsam ausgedehnt, so wird der durch die Verlängerung der Seiten des Kegels entstehende zweyte Kegel auf dieselbe Weise geschnitten, wodurch eine zweyte Hyperbel in entgegengesetzter Richtung entsteht.

Da die Eigenschaften der ersteren zwey Schnitte, des geradlinigen Dreyeckes und des Kreises, bereits aus §. 11 und 21 bekannt

sind, so werden wir zu unserm Zwecke von den Kegelschnitts-Linien nur die wesentlichen Eigenschaften der Parabel und der Ellipse hier anführen, die Hyperbel aber als außer den Grenzen dieser Schrift liegend, gänzlich hinweg lassen. Fig. 143.

§. 269.

Nebst den in §. 90 vorläufig schon gegebenen Benennungen über Abscissen und Ordinaten 2c. kann in Bezug auf die vorstehenden krummen Linien (Curven) im Allgemeinen hier noch erinnert werden, daß diejenige Abscissenlinie, welche alle parallelen Ordinaten der Curven in zwey gleiche Theile theilet, ein Durchmesser, und derjenige Durchmesser insbesondere, der die Ordinaten senkrecht in zwey gleiche Theile schneidet, die Achse der krummen Linie genennt wird; der Durchschnittspunct der Achse und der krummen heißt der Scheitelpunct derselben. Eine Gerade, welche mit einer Krummen nur einen einzigen Punct gemein hat, übrigens aber ganz außerhalb der Krummen liegt, heißt Tangente (§. 41.), und der Theil der Abscissenlinie, welcher von der verlängerten Tangente und der durch den Berührungspunct gehenden Ordinate abgeschnitten wird, heißt Subtangente der krummen Linie. Diejenige gerade Linie, welche auf der Tangente im Berührungspunct senkrecht steht, und die Abscissenlinie schneidet, heißt die Normale, und das Stück der Abscissenlinie zwischen der Normale und Ordinate, die Subnormale. Diejenige gerade Linie, welche bey jeder Zu- oder Abnahme der Abscissen und Ordinaten einer Curve unverändert bleibt, wird der Parameter genennt. Derjenige Punct, in welchem die Achse den Parameter senkrecht in zwey gleiche Theile theilet, wird der Brennpunct (Focus) der Parabel und Ellipse genennt. Eine gerade Linie endlich, welche aus dem Brennpuncte an einem Umfangspunct der Krummen gezogen wird, heißt der Leitstrahl.

Übrigens ist schon allgemein angenommen, die Abscissen durch x, die Ordinaten durch y, den Bogen, welcher von dem durch den Anfangspunct und durch den Endpunct der Abscissen gezogenen Ordinaten abgeschnitten wird, durch z, die unveränderlichen geraden Linien aber einer und derselben krummen Linie mit den Anfangsbuchstaben a, b, c.... zu bezeichnen.

Bey der Untersuchung der vorgenannten krummen Linien wollen wir, zu unserm Zwecke, unser Augenmerk vorzüglich darauf richten: 1) Aus der Natur der krummen Linie die Gleichung für dieselbe aufzustellen, oder wenn die Gleichung gegeben ist, die zugehörige Curve

zu verzeichnen; 2) den Ort der größten und kleinsten Ordinate zu bestimmen; 3) für jeden gegebenen Punct der krummen Linie die Tangente, Subtangente, Normale und Subnormale zu bestimmen; 4) den Flächen- und Kubikinhalt zu berechnen, der von einer Abscisse, ihren Ordinaten und den zugehörigen Bogen eingeschlossen ist rc.

I. Die Parabel.

§. 270.

Fig. 141. Es sey das Dreyeck KNR der vertikale Schnitt durch die Achse eines senkrechten Kegels, die Ebene BAC senkrecht auf diesen Schnitt und parallel zur Seite KR desselben geführt, so ist die krumme Linie $BMAC$ eine Parabel (§. 268. 3). Denkt man durch einen beliebigen Punct F eine Ebene $EMFwE$ parallel zur Grundfläche $KBNC$ des Kegels; so ist dieser Schnitt ein Kreis (§. 173. 4), und da alle drey Ebenen, nämlich die Grundfläche $KBNMC$, der mit dieser parallel gelegte Kreis $EMFwE$, und die Parabel CAB auf dem Achsendreyecke KNR senkrecht stehen; so ist auch die Ebene EMF senkrecht auf der Ebene CAB. Fället man aus dem Umfangspunct M des Kreises auf seinen Durchmesser EF die Senkrechte MP; so ist $MP^2 = EP \,.\, PF$ (§. 86. 1).

Da EF parallel zu KN ist (§. 165.), so ist das Dreyeck $APF \sim AGN$, und es verhält sich $AG : GN = AP : PF$, woraus $PF = \frac{GN \,.\, AP}{AG}$ folgt. Diesen Werth für PF oben substituirt, so wird $MP^2 = \frac{EP \,.\, GN \,.\, AP}{AG} = \frac{EP \,.\, GN}{AG} \,.\, AP = \frac{KG \,.\, GN}{AG} \,.\, AP$.

Da ferner die Geraden KG, GN und AG für jede bestimmte Parabel unveränderlich sind, folglich der Quotient $\frac{KG \,.\, GN}{AG}$ für dieselbe beständig ist, daher $\frac{KG \,.\, GN}{AG} = p =$ dem Parameter gesetzt werden kann (§. 269.); so ist p die 4te Proportionallinie zur Achse AG der Parabel und den beyden Abschnitten GN und KG, in welche die Achse AG den Durchmesser KN der Grundfläche des Kegels theilet. Der Parameter kann daher als gerade Linie leicht dargestellt werden, wenn wir im vorliegenden Falle KG von G gegen A bis u tragen, und zu AN die Parallele uv ziehen, so ist Gv der Parameter $= p$. Denn es ist sodann $AG : GN = (KG = Gu) : (Gv = p)$.

Setzt man $MP = y$ und $AP = x$; so ist $y^2 = px$
und $y = \pm \sqrt{px}$.

Diese Gleichung gibt uns zu erkennen:

1) Daß zu jeder positiven Abscisse zwey gleiche Ordinaten nach entgegen gesetzter Richtung gehören, und, weil für $x = 0$ auch $y = 0$ wird, daß der Punct A der Scheitel der Parabel, und folglich eine durch diesen Punct auf die Achse gezogene Senkrechte eine Tangente derselben ist (§. 269). Fig. 141. und 142.

2) Diesseits der Tangente vom Scheitelpunct A an wachsen die Abscissen und Ordinaten ohne Ende. Denn für $x = \infty$ wird $y = \pm \sqrt{p \infty}$, das heißt, die zwey Schenkel der Parabel laufen diesseits ohne Ende fort.

3) Nimmt man x negativ an, so ist $y = \pm \sqrt{-p\,x}$ eine unmögliche Größe, folglich liegt kein einziger Punct der Parabel jenseits der Tangente oder des Scheitels A.

4) Setzt man $x = \frac{1}{4}p$, so ist $\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}} = y = \pm\frac{p}{2}$, d. h. der Brennpunct der Parabel ist um den 4ten Theil des Parameters vom Scheitel derselben entfernt.

5) Sind X und x zwey Abscissen, Y und y die dazu gehörigen Ordinaten; so ist $Y^2 = pX$
und $y^2 = px$

daher $Y^2 : y^2 = pX : px = X : x$; d. h. die Quadrate der Ordinaten verhalten sich wie ihre Abscissen.

6) Trägt man den halben Parameter vom Brennpunct F (der auch Leitpunct genennt wird) auf der rückwärts verlängerten Achse nach C, und zieht durch diesen Punct auf die Achse eine Senkrechte EH, so heißt diese die Leitlinie der Parabel; und eine Gerade FM aus dem Brennpuncte nach einem beliebigen Puncte M der Parabel gezogen, heißt der Leitstrahl dieses Punctes M. Der Leitstrahl eines jeden Punctes der Parabel ist gleich der zugehörigen Abscisse mehr dem 4ten Theile des Parameters.

Denn es ist $FM^2 = MP^2 + PF^2 = y^2 + (PA - FA)^2 = p \cdot x + (x - \frac{1}{4}p)^2 = p \cdot x + x^2 - \frac{1}{2}p \cdot x + \frac{1}{16}p^2 = x^2 + \frac{1}{2}p \cdot x + \frac{1}{16}p^2$; folglich ist $FM = \sqrt{x^2 + \frac{1}{2}px + \frac{1}{16}p^2} = x + \frac{1}{4}p$.

7) Daher ist es leicht, eine Parabel zu verzeichnen, und zwar a) wenn die zugehörige Gleichung gegeben ist, so erhellet die Ausführung aus den so eben bekannt gewordenen Eigenschaften der Parabel. b) Ist aber der Parameter gegeben, so kann die Parabel durch eine ununterbrochene Bewegung beschrieben werden. Zu diesem Ende ziehe man die Gerade CN als Achse, trage aus einem beliebigen Punct

Fig. 142. F (dem Brennpuncte) den halben Barometer bis C, ziehe durch diesen Punct C die Leitlinie EH senkrecht auf die Achse, theile FC in zwey gleiche Theile, so ist A der Scheitelpunct der Parabel. Hierauf befestige man an ein rechtwinkeliges Lineal einen Faden in der Länge des Lineals uw, und zwar mit einem seiner Ende am Ende des Lineals, mit seinem andern Ende aber in dem Brennpuncte F, drücke den Faden mittelst des Stiftes an das Lineal, während man dasselbe mit dem andern Schenkel an der Leitlinie fortbewegt; so wird der Stift eine krumme Linie beschreiben, welcher ganz die Eigenschaft einer Parabel zukommt. Denn es ist für jeden Punct dieser Curve der Leitstrahl $FM' = M'w = PC = AP + AC = x + \frac{1}{4}p$. vermög oben 6).

§. 271.

Zieht man aus einem Puncte M der Parabel zur Achse eine Parallele MD und die Gerade MF in den Brennpunct, und halbirt man den Winkel FMD durch die Gerade TQ; so berührt diese Gerade die Parabel in dem Puncte M.

Dieß zu erweisen, schneide man $MD = MF$ ab, und führe durch D eine Senkrechte DH auf die Achse CN, so ist DH die Leitlinie. Hierauf ziehe man die Gerade FD, so sind die Dreyecke MKD und MKF einander gleich, die Gerade TQ senkrecht auf FD, und $FK = KD$ (§. 23. 1); es ist also auch $QD = QF$ (§. 26. 3). Nun aber ist die Senkrechte $QE < QD$ (§. 28.), folglich ist auch $QE < QF$. Der Punct Q liegt also außer der Parabel. Eben dieses läßt sich von jedem andern Punct der Geraden TQ, den Punct M ausgenommen, erweisen.

Hieraus folgt:

1) Die Subtangente PT ist gleich der doppelten Abscisse. Denn wegen der parallelen DS mit TN und der senkrechten Stellung der Geraden MT auf DF ist das Dreyeck $DMK = KFT$, folglich $FT = DM = CP$; also ist auch $FT - AF = CP - AC$, nämlich $AT = AP$; endlich ist $AT + AP = AP + AP$; also $PT = 2AP$. Diesemnach kann an einem jeden Puncte M der Parabel eine Tangente leicht gezogen werden, wenn man auf die Achse die senkrechte Ordinate MP führt, die Abscisse PA auf die verlängerte Achse von A bis T aufträgt, und T mit M durch eine Gerade verbindet.

Soll hingegen aus einem außerhalb der Parabel gelegenen Punct

R eine Tangente an dieselbe gezogen werden, so durchschneide man mit der Entfernung RF die Leitlinie in D, ziehe aus D eine Parallele DS zur Achse, und verbinde den Durchschnittspunct M mit dem gegebenen R durch eine Gerade RM; so wird diese die Parabel in dem Punct M berühren, weil sie den Winkel DMF halbiret. Auch erhellet nun, wie man bey einer schon gezogenen Tangente den Berührungspunct leicht finden könne. Fig. 142.

2) Die Subnormale ist gleich dem halben Parameter, und folglich bey einer und derselben Parabel unveränderlich.

Denn vermög §. 62. ist das Dreyeck $MPT \sim MPN$, daher ist

$MP^2 = PN \,.\, PT$ vermög §. 86. 1)

nämlich $y^2 = PN \,.\, 2x$

und auch $y^2 = px$ vermög §. 270.

also auch $PN \,.\, 2x = px$; woraus $PN = \frac{1}{2}p$ folgt. Diesemnach kann zu jeder Parabel, bey welcher die Lage der Achse gegeben ist, der zugehörige Parameter, Brennpunct, und Abstand der Leitlinie gefunden werden, wenn man an einem beliebigen Punct, oben nach 1) eine Tangente TM zieht, die Senkrechte MN auf TM errichtet, und hierauf $\frac{1}{2}PN$ von A bis F und C überträgt.

3) Die Tangente ist gleich der Quadratwurzel aus der Summe des 4fachen Quadrates der Abscisse und des Productes der Abscisse in den Parameter, nämlich $TM = \sqrt{(TP^2 + MP^2)} = \sqrt{(4x^2 + px)} = \sqrt{4x(x + \frac{1}{4}p)}$.

4) Die Normale ist gleich der Quadratwurzel aus der Summe des Productes der Abscisse in den Parameter, und des 4ten Theiles des Parameter-Quadrates, nämlich es ist

$$MN = \sqrt{(PM^2 + PN^2)} = \sqrt{(px + \tfrac{1}{4}p)^1} = \sqrt{p(x + \tfrac{1}{4}p)}.$$

5) Wie der Flächeninhalt einer Parabel, und der Kubikinhalt eines Paraboloides zu bestimmen sey, wird weiter unten gezeigt werden.

a) In jedem Puncte der Parabel ist der Winkel $SMQ = KMF$, weil jeder derselben dem Winkel DMK gleich ist. Wenn demnach an eine hohle parabolische Fläche, welche durch die Umdrehung einer halben Parabel APM um ihre Achse erzeugt wird, mehre Feuer-, Licht- oder Stimmstrahlen mit der Achse parallel einfallen; so vereinigen sich dieselben nach dem Abprellen alle in dem Puncte F, weil der

Fig. 142. Abprell-Winkel stets dem Einfall-Winkel gleich ist. Umgekehrt, wenn aus dem Brennpuncte einer hohlen parabolischen Fläche (eines derley Hohlspiegels) mehre Feuer-, Licht- oder Stimmstrahlen nach was immer für Richtungen ausgehen, so werden alle jene, welche an die hohle parabolische Fläche anstoßen nach dem Abprellen in einer zur Achse parallelen Richtung fortlaufen. Befestiget man daher an zwey entgegengesetzten Wänden eines Zimmers zwey parabolische Hohlspiegel dergestalt, daß ihre hohlen Flächen gegen einander gekehrt sind, und ihre Achsen beyde in einer und derselben geraden Linie liegen; so werden die Strahlen, welche aus dem Brennpuncte eines Hohlspiegels ausgehen, sich in dem Brennpuncte des entgegengesetzten Hohlspiegels vereinigen. Wenn man daher in dem Brennpuncte des einen Hohlspiegels glühende Kohlen, in dem Brennpunct des andern aber Schießpulver anbringt, so wird dadurch das Schießpulver entzünden. Oder wenn Jemand seinen Mund in den Brennpunct des ersten, ein Anderer aber sein Ohr in den Brennpunct des zweyten Hohlspiegels bringt, so wird der zweyte die Worte des erstern vernehmen, wenn sie auch so leise gesprochen werden, daß dieselben keiner von den Umstehenden vernehmen kann.

II. Die Ellipse.

§. 272.

143. Es sey KNR das Achsendreyeck eines Kegels, die Ebene $AMBtA$ unter einem beliebigen Winkel mit der Grundfläche durch den Kegel geführt, so ist die krumme Linie $AMBtA$ eine Ellipse (§. 268. 4), und denkt man in einem beliebigen Puncte D senkrecht auf die Achse RL einen Schnitt durch den Kegel, so ist die Krumme $CMDtC$ ein Kreis (§. 268. 2). Die gemeinschaftliche Durchschnittslinie MP steht sowohl auf der Geraden AB als auf CD senkrecht, also ist AB eine Abscisse, MP die dazu gehörige Ordinate, und A und B sind die Scheitelpuncte der Ellipse. Es ist demnach $MP^2 = PC.PD$, vermög §. 86. 1).

Zieht man in dem Achsendreyeck durch die Scheitelpuncte A und B die Geraden BG und AE parallel zur Grundfläche des Kegels, so sind die Dreyecke APD und BAG ähnlich, und es verhält sich $AB : BG = AP : PD$; hieraus ist $PD = \frac{BG . AP}{AB}$. In den ähnlichen Dreyecken AEB und PCB verhält sich $AB : AE = PB : PC$; daraus ist $PC = \frac{AE . PB}{AB}$. Diese Werthe für PC und PD oben substituirt, so ist $MP^2 = \frac{AE.PB}{AB} . \frac{BG.AP}{AB} = \frac{AE.BG}{AB} . \frac{PB.AP.}{AB}$

Daraus kann man $\frac{AE \cdot BG}{AB} = p =$ dem Parameter setzen, weil bey jeder Lage der Ellipse, der Punct A mag wo immer in einer Seite des Kegels angenommen werden, die Proportion $AB : BG = AE : p$ Statt findet, und mithin daraus p eine beständige Größe ist (§. 269). Setzt man $\frac{1}{2} AB = a$, also $AB = 2a$, und die Abscisse $AP = x$, so ist $PB = 2a - x$; und setzt man die Ordinate $MP = y$, so ist $y^2 = \frac{p \cdot (2a - x) \cdot x}{2a} = \frac{p}{2a} (2ax - x^2) \ldots . (\mathfrak{A})$ Fig. 143. und 144.

endlich $y = \pm \sqrt{\frac{p}{2a}} (2ax - x^2)$.

Diese Gleichung gibt uns zu erkennen:

1) Daß zu jeder positiven Abscisse zwey gleiche Ordinaten in entgegengesetzter Richtung gehören, und, weil für $x = 0$ auch $y = 0$ wird, daß der Punct A ein Scheitelpunct der Ellipse ist.

2) Man setze $x = 2a$, so wird $y = \pm \sqrt{\frac{p}{2a}} (2a \cdot 2a - 4a^2)$ $= \pm \sqrt{\frac{p}{2a}} \cdot 0 = 0$, das heißt, auch der Punct B ist ein Scheitelpunct der Ellipse und folglich ist diese eine in sich selbst zurückkehrende krumme Linie; deßwegen wird, wenn man $x > 2a$ oder $= -2a$ (negativ) annimmt, für y eine umögliche Größe erhalten.

3) Sind X und x zwey Abscissen, und Y und y die dazu gehörigen Ordinaten, so ist $Y^2 = \frac{p}{2a} (2aX - X^2)$

und $y^2 = \frac{p}{2a} (2ax - x^2)$

daher $Y^2 : y^2 = X(2a - x) : x(2a - x)$; das heißt, in jeder Ellipse verhalten sich die Quadrate der Ordinaten, wie die Producte aus den zugehörigen Abschnitten der Achse.

4) Setzt man die Achse der Ellipse $2a = \infty$, so wird $y^2 = px\left(\frac{2a - x}{2a}\right) = px\left(\frac{\infty - x}{\infty}\right) = px$, d. h. wenn die Achse der Ellipse in Bezug auf den Parameter ∞ ist, so geht sie in eine Parabel über; man kann demnach sehr excentrische Ellipsen bey ihren Scheiteln (z. B. in der Astronomie die Laufbahnen der Cometen bey ihren Sonnennähen) für paraboliche Linien ansehen.

§. 273.

Wenn man in der Mitte der Achse AB auf diese eine Senkrechte errichtet, und sie beyderseits bis an den Umfang der Ellipse verlängert,

Fig. 144. so heißt die Gerade ED die kleine Achse und jene AB die große oder Querachse. Da diese zwey Achsen in ihrem Durchschnittspuncte sich halbiren, so ist dieser Punct der Mittelpunct der Ellipse. Der Abstand des Mittelpunctes von einem Brennpuncte wird die Excentricität genennt.

1) Rechnet man die Abscissen vom Mittelpuncte C auf der großen Achse, so ist $CP = AC - AP = a - x$ (§. 272). Es muß also in die daselbst aufgestellte Gleichung (A) für x gesetzt werden $a - x$, und es wird dann seyn:

$$y^2 = \frac{p}{2a}[2a(a-x) - (a-x)^2] = \frac{p}{2a}(a^2 - x^2) \ldots\ldots (\mathfrak{A})$$

und $y = \pm \sqrt{\frac{p}{2a}(a^2 - x^2)}$; woraus wieder verschiedene Eigenschaften der Ellipse bekannt werden, wenn man für x und a verschiedene geeignete Werthe setzt.

2) Vermög §. 272 1) gehören zu jeder Abscisse zwey gleiche Ordinaten, also ist in der halben großen Achse die Ordinate $y = CE = b$, wenn wir die halbe kleine Achse mit b bezeichnen, daher $y^2 = b^2$. Setzt man oben §. 272 in (A) für $x = a$, so ist

$$y^2 = \frac{p}{2a}(2a^2 - a^2) = \frac{pa}{2};$$

also ist $\frac{pa}{2} = b^2$

und $p = \frac{2b^2}{a}$.

Setzt man diesen Werth für p in die obige Gleichung (A), so wird $y^2 = \frac{2b^2}{2a^2}(a^2 - x^2) = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$ . . . ($\mathfrak{B}$)

endlich $y = \pm \sqrt{\frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)} = \pm \frac{b}{a}\sqrt{(a^2 - x^2)}$.

3) Es ist aber auch $y = CD = \frac{1}{2}DE$,

daher $y^2 = \frac{DE^2}{4}$; für $x = a$ ist vermöge des

Vorigen auch $y^2 = \frac{pa}{2} = \frac{p \cdot 2a}{4}$;

also auch $\frac{DE^2}{4} = \frac{p \cdot 2a}{4} = \frac{p \cdot AB}{4}$

oder $DE^2 = p \cdot AB$,

endlich $AB : DE = DE : p$; es ist nämlich die kleine Achse die mittlere Proportionale zwischen der großen Achse und dem Parameter.

4) Daraus ersehen wir, daß aus der bekannten großen und kleinen Achse einer Ellipse ihr Parameter durch eine Zeichnung leicht bestimmt werden kann, wenn man nämlich die Endpuncte A und D der in ihren Mittelpuncten auf einander senkrecht gestellten Achsen durch die Gerade AD verbindet, und auf diese in dem Puncte D die Senkrechte DG errichtet, so ist $CG = \frac{1}{2}p$ = dem halben Parameter. Zur Überzeugung denke man durch die drey Puncte A, D und G einen halben Kreisbogen, so ist wegen der Construction und §. 62 das Dreyeck $ACD \sim CDG$, und es verhält sich Fig. 144.

$AC : CD = CD : CG$

oder $2AC : 2CD = 2CD : 2CG$, und auch

$AB : DE = DE : p$, vermög Vorigen in 3)

daraus folgt $CG = \frac{p}{2}$.

5) Da $CG <$ als die halbe kleine Achse b, daher auch $\frac{p}{2} <$ als b ist, so muß es zwischen C und A, oder zwischen C und B auf der großen Achse einen Punct geben, wo die Ordinate gleich dem halben Parameter, das heißt, wo $y = \frac{1}{2}p$, und die doppelte Ordinate $2y = hh' = HH' = p$ ist.

6) Um diesen Punct, nämlich $cf = CF$ oder den **Brennpunct** (§. 269) zu finden, setze man die Excentricität (§. 273) $= x$, so wird $2y = p$,

und vermög oben 2) ist auch $\frac{2b^2}{a} = p$

also auch $2y = \frac{2b^2}{a}$

und $y = \frac{b^2}{a}$

daher $y^2 = \frac{b^4}{a^2}$.

Setzt man für y^2 den Werth in die Gleichung (B) oben in 2), so ist $\frac{b^4}{a^2} = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$,

oder $b^2 = a^2 - x^2$

endlich $a^2 = b^2 + x^2$ . . . . (C)

Es schließen demnach die **halbe große und halbe kleine Achse** und die **Excentricität** einer Ellipse ein rechtwinkeliges Dreyeck ein, wobey die große Halbachse die Hypothenuse ist. Aus den zwey gegebenen Achsen AB und DE lassen sich die Brennpuncte und Excentricität einer Ellipse leicht bestimmen, wenn man beyde

Fig. 144. Achsen dergestalt senkrecht auf einander stellt, daß sie sich wechselweise in ihrem Durchschnittspuncte halbiren, und hierauf mit der großen halben Achse $AC = CB$ aus den Endpuncten D und E der kleinen Achse die Puncte f und F auf der großen Achse abschneidet, so werden auch $fC = CF$ seyn.

7) Sind einmahl die Brennpuncte bestimmt, so kann aus der bekannten Summe der Leitstrahle (§. 269) $MF + Mf = AB = 2a$, und aus dem bekannten Abstande der Brennpuncte Ff eine Ellipse durch eine ununterbrochene Bewegung leicht beschrieben werden, wenn man in den Brennpuncten f und F einen Faden in der Länge der großen Achse $= 2a = AB$ befestiget, und hierauf einen Stift M an dem Faden $FM + Mf = AB$ dergestalt herum führt, daß der Faden stets in gleichförmiger Spannung erhalten werde.

8) Setzt man oben 2) in der Gleichung $y = \pm \sqrt{\frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)}$ für $x = 0$, so wird $y = \pm b$, das heißt, die Krumme geht durch beyde Scheitelpuncte D und E der kleinen Achse, und y ist als größte Ordinate der kleinen Halbachse gleich. Setzt man aber $x = a$, so ist $y = \pm 0$, das heißt, die Krumme geht auch durch die beyden Scheitelpuncte A und B der großen Achse.

9) Setzt man $b = a$, so wird $y = \pm \sqrt{(a^2 - x^2)}$ eine Gleichung des Kreises (§. 90 II.). Eben so, wenn man oben 6) in der Gleichung (C) die Excentricität der Ellipse $= 0$, d. i. für $x = 0$ setzt, so geht die Ellipse in beyden Fällen in einen Kreis über.

145. 10) Jede Ordinate der Ellipse verhält sich zu der zugehörigen Ordinate des Kreises auf der großen Achse, wie die kleine Halbachse zu der großen Halbachse, nämlich

$PM : PM' = CE : (CE' = CB)$; oder $pm : pm' = CE : CB \ldots$

Denn in der Ellipse ist $PM^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$, und

im Kreise ist $(PM')^2 = a^2 - x^2$ (§. 90. II.) für eben dieselbe Abscisse $CP = x$; folglich ist auch

$$PM^2 : (PM')^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) : (a^2 - x^2);\ \text{nämlich}$$

$$PM : PM' = b : a,\ \text{u. s. w.}$$

§. 274.

Wenn man an einem beliebigen Punct M der Ellipse aus beyden Brennpuncten die Leitstrahle FM und fM zieht, einen davon

z. B. den größern fM verlängert, und den Winkel GMF durch die Gerade QT halbirt; so berührt diese Gerade QT die Ellipse in dem einzigen Puncte M. Fig. 145.

Dieß darzuthun, übertrage man den kleinern Leitstrahl FM auf die Verlängerung des größern von M bis G, und ziehe FG, so ist $KG = KM$ und MT senkrecht auf GF (§. 23. 1). Zieht man aus einem beliebigen andern Punct Q die Geraden QG und QF, so ist $QG = QF$ vermög 26. 3); zieht man ferner QF, so ist

$$fG < GQ + Qf,$$

dagegen ist $fG = fM + (MG = MF) = AB$

folglich ist auch $GQ + Qf > AB$. Der Punct Q liegt also außerhalb der Ellipse, weil sonst $GQ + Qf = AB$ seyn müßte. Dieß gilt, M ausgenommen, auch von jedem andern Puncte derselben.

Daraus folgt:

1) Daß an einem gegebenen Punct der Ellipse eine Tangente leicht zu ziehen sey. Ist hingegen aus einem außerhalb der Ellipse gelegenen Punct t eine Tangente an die Ellipse zu ziehen, so beschreibe man aus diesem gegebenen Punct mit der Entfernung tf des einen Brennpunctes einen Kreisbogen fR, durchschneide diesen aus dem andern Brennpunct mit dem Halbmesser $FR = AB$, verbinde R mit F durch die Gerade RF, und ziehe von t nach dem Durchschnittspunct q die Gerade tq. Diese Gerade berührt die Ellipse in dem Puncte q, weil $tR = tf$, und auch $qf = qR$; folglich fR senkrecht auf qt, und der Winkel $tqf = tqR$ ist (§. 39.).

2) Da der Winkel $TMF = GMT$ ist, vermög Obigen
und auch der Winkel $fMQ = GMT$ ist, vermög §. 20,

so ist auch $TMF = fMQ$; es schließen also die Leitstrahle eines und desselben Punctes der Ellipse mit der Tangente dieses Punctes gleiche Winkel ein. Wenn demnach mehre Feuer-, Licht- oder Stimmstrahlen aus einem Brennpuncte eines elliptischen Hohlspiegels (der durch die Umdrehung des halben elliptischen Umfanges ADB um die Achse AB erzeugt wird) nach was immer für Richtungen ausfahren, so werden dieselben nach dem Abprellen sich wieder in dem andern Brennpunct vereinigen.

3) Die Subnormale $PN = \frac{b^2 x}{a^2}$, wenn man die Abscissen auf der großen Achse vom Mittelpuncte zählt.

Es sey der Kürze wegen die Excentricität $cf = CF = c$, so

Fig. 145. ist $fP = c + x$, und $FP = c - x$; es sey ferner $fM = h$, und da $FM + fM = 2a$ ist, so ist $FM = 2a - h$. Da ferner

$$MP^2 = fM^2 - fP^2$$
$$\text{und } MP^2 = FM^2 - FP^2 \text{ ist,}$$

so ist auch $fM^2 - fP^2 = FM^2 - FP^2$,

oder $fM^2 - FM^2 = fP^2 - FP^2$

oder $h^2 - (2a - h)^2 = (c + x)^2 - (c - x)^2$, wenn man gehörig substituirt; daraus findet man $h = \frac{a^2 + cx}{a} = fM$.

Da MN und auch FG auf MT senkrecht stehen, so ist MN mit FG parallel (§. 37.) und also das Dreyeck $fMN \sim fGF$, und es verhält sich $fG : fF = fM : fN$

$$\text{oder } 2a : 2c = \frac{a^2 + cx}{a} : fN; \text{ woraus}$$

$fN = \frac{a^2 c + c^2 x}{a^2}$ folgt.

Es ist aber $PN = fP - fN = c + x - \frac{a^2 c + c^2 x}{a^2} = \frac{(a^2 - c^2)\,x}{a^2}$; daraus folgt $PN = \frac{b^2 x}{a^2}$, wenn man für $a^2 - c^2$ seinen Werth b^2 setzt, vermög §. 273 unter 6).

4) Die Normale $MN = \sqrt{(MP^2 + PN^2)} = \sqrt{\left(y^2 + \frac{b^4 x^2}{a^4}\right)} = \sqrt{\left(\frac{b^4}{a^2} + \frac{b^4 x^2}{a^4}\right)} = \frac{b^2}{a^2} \sqrt{(a^2 + x^2)}$ wird aus dem rechtwinkeligen Dreyecke MNP gefunden, wenn man gehörig substituirt.

5) Die Subtangente $PT = \frac{a^2 - x^2}{x}$ erhält man aus den ähnlichen Dreyecken NPM und PMT; es verhält sich nämlich

$$PN : PM = PM : PT,$$

oder $\frac{b^2 x}{a^2} : \frac{b}{a} \sqrt{(a^2 - x^2)} = \frac{b}{a} \sqrt{(a^2 - x^2)} : PT$; woraus für PT der vorige Werth gefunden wird. Für $x = 0$ ist $PT = \infty$, es lauft also die Tangente am Scheitel der kleinen Achse mit der großen Achse parallel. Setzt man $x = a$, so ist $PT = 0$, folglich steht die Tangente am Scheitel der großen Achse senkrecht auf derselben.

6) Die Tangente MT endlich findet man aus dem rechtwinkeligen Dreyecke MPT, es ist nämlich $MT = \sqrt{\frac{b^4}{a^2} + \left(\frac{a^2 - x^2}{x}\right)^2}$, wenn man für $PM^2 = y^2$ und PT^2 gehörig substituirt. Für $x = 0$ ist die Tangente $MT = \infty$.

§. 275.

1) Der Flächeninhalt einer Ellipse ist $= ab\pi =$ dem Producte aus beyden Halbachsen mit dem Verhältnisse des Durchmessers eines Kreises zu seinem Umfange. Fig. 145.

Denken wir uns die große Achse AB in unendlich viele gleiche Theile getheilt, und aus allen Theilungspuncten senkrechte Ordinaten bis an den Umfang der Ellipse, und verlängert bis an den Umfang des Kreises auf der großen Achse; so ist dadurch die halbe Ellipse $ABEA$ und auch die halbe Kreisfläche $ABE'A$ in ihre Elemente aufgelöst. Da jede zwey übereinstimmende Elemente als Rechtecke angesehen werden können, die auf einer gemeinschaftlichen Grundlinie stehen, deren Höhen die Ordinaten sind, so ist

$$vCEw = vC.CE$$

und $vCE'w' = vC.CE'$

daher $vCEw : vCE'w' = vC.CE : vC.CE'$ (Rk. 72. I.)

oder $vCEw : vCE'w' = b : a$ (Rk. 268).

Da dieses Verhältniß bey jeden zwey übereinstimmenden Elementen Statt findet §. 273 10), so verhält sich auch die Summe aller elliptischen Elemente zur Summe aller Kreis-Elemente, wie $b : a$ (Rk. 271.); es verhält sich nämlich die halbe elliptische Fläche zur halben Kreisfläche, wie die kleine Halbachse b zur großen Halbachse a, also auch die ganze elliptische Fläche $= f$ zur Kreisfläche $= F$ auf der großen Achse, wie $b : a$ vermög Rk. 268 unter V.; nämlich

$$f : F \quad = b : a$$

oder $f : a^2\pi = b : a$, woraus $f = ab\pi$ folgt.

2) Aus gleichem Grunde verhält sich auch jeder halbe elliptische Abschnitt Afu zum übereinstimmenden halben Kreisabschnitte Afs wie $b : a$. Und da das Dreyeck

$Cfu = Cf \cdot \frac{1}{2}fu$, so wie

$Cfs = Cf \cdot \frac{1}{2}fs$ ist, so verhält sich

$Cfu : Cfs = fu \cdot fs = b : a$, vermög §. 273. 10); folglich verhält sich auch jeder elliptische Ausschnitt ACu zu seinem übereinstimmenden Kreisausschnitt ACs wie $b : a$ (wegen $Afu + fCu) : (Afs + fCs) = 2b : 2a = b : a$ (Rk. 271).

3) Der Kubikinhalt K eines Ellipsoid auf der großen Achse, welches durch die Umdrehung der Ellipse um diese Achse erzeugt wird, ist $= \frac{4}{3}ab^2\pi = K$.

Fig. 145. Man denke, wie im vorigen Falle, die große Achse in unendlich viele gleiche Theile getheilt, und durch die Theilungspuncte parallele Ebenen senkrecht auf die Achse gelegt, so wird die Ellipse so wie die Kugel in ihre Elemente, in lauter Zylinder von gleichen und unendlich kleinen Höhen aufgelöst.

Es ist ein solcher Ellips-Zylinder $z = (vw)^2\pi . vC$
und ein solcher Kugelkörper $Z = (vw')^2\pi . vC$ } §. 201.

daher verh. sich $z : Z = vw^2.\pi : (vw')^2\pi = vw^2 : (vw')^2$

Nun verhält sich aber $vw : vw' = b : a$ vermög §. 273. 10), oder $vw^2 : (vw')^2 = b^2 : a^2$;

also auch $z : Z = b^2 : a^2$.

Die Summe der Ellips-Zylinder sind aber dem Kubikinhalte des Ellipsoid $= K$, und die Summe der Kugel-Zylinder sind gleich dem Kubikinhalte der Kugel $= \frac{4}{3} a^3 \pi$; es verhält sich nämlich $K : \frac{4}{3} a^3 \pi = b^2 : a^2$, woraus $K = \frac{4}{3} a b^2 \pi$ folgt; also ist der Kubikinhalt des halben Ellipsoid auf der großen Achse, nämlich $\frac{1}{2} K = \frac{2}{3} a b^2 \pi$; das heißt: das halbe Ellipsoid auf der großen Achse ist gleich $\frac{2}{3}$ eines Zylinders von gleicher Grundfläche und Höhe.

Ähnlicher Weise findet man, daß der Kubikinhalt K' eines Ellipsoid auf der kleinen Achse $= \frac{4}{3} b a^2 \pi$, und das halbe Ellipsoid, nämlich $\frac{1}{2} K' = \frac{2}{3} b a^2 \pi$, also auch $\frac{2}{3}$ eines Zylinders von derselben Grundfläche und Höhe ist.

Zweyter Abschnitt.

Von der Differenzial-Rechnung.

I. Begriffe und allgemeinste Regeln.

§. 276.

Aus der Einleitung dieser Schrift ist bekannt, daß wir uns die stetigen Größen durch die Bewegung ihrer Grenzen entstehend, und nach allen Richtungen vergrößert (oder auch vermindert) denken können.
146. Es sey AC die Seite eines Dreyeckes in eine unendliche Anzahl gleicher Theile getheilt, und Dm sey ein solcher Theil, so ist $Dm = \frac{AC}{\infty}$,

nämlich ein unendlich kleiner Theil von AC (Nk. 328). Denkt man ferner DC um das Theilchen Dm vermindert, so nennt man das Stück Dm die Differenzial-Größe oder das Differenziale von DC, und DC selbst heißt die veränderliche Größe. Man sieht, daß bey der Veränderung von DC um das Differenziale Dm auch die zugehörige DE sich um den unendlich kleinen Theil pE verändert habe, und es sind deshalb DC und DE von einander abhängige Größen, die man Functionen nennt (§. 219), es ist also auch $pE = \frac{DE}{\infty}$, das Differenziale von DE. Fig. 146.

Ganz dasselbe gilt auch im umgekehrten Falle, wenn Cm und mn die veränderlichen Größen sind, welche sich um ihre zugehörigen Differenzialen mD und pE vergrößert haben. Da jede stetige Größe durch Zahlen einer zum Grunde gelegten Einheit ausgedrückt wird, so ist das Ebengesagte auch von jeder veränderlichen Zahl zu verstehen.

Aus dem Vorstehenden folgt nun, daß nur veränderliche Größen einer Differenzial-Größe fähig sind, die unveränderlichen Größen aber kein Differenziale haben; man pflegt zu sagen: das Differenziale einer unveränderlichen Größe ist $= 0$.

Die veränderlichen Größen werden mit den letzten Buchstaben ... $x\,y\,z$; die unveränderlichen aber mit den Anfangsbuchstaben des Alphabets $a\,b\,c$.... bezeichnet. Setzt man die obige Gerade $CD = x$, so ist $Bm = \frac{x}{\infty} =$ dem Differenziale von x. Der Kürze und bequemern Schreibart wegen, bezeichnet man das Differenziale einer Größe mit dem Buchstaben d; das heißt: man setzt einer veränderlichen Größe x den Buchstaben d vor; jedoch darf bey dieser Bezeichnung $\mathrm{d}x$, der Buchstab d nicht als ein Factor der Größe angesehen werden, sondern dieses Zeichen $\mathrm{d}x$ bezeichnet einen unendlich kleinen Theil dieser Größe x, es ist nämlich $\mathrm{d}x = \frac{x}{\infty}$. Desgleichen, wenn $mn = Dp = y$ gesetzt wird, so ist $pE = \mathrm{d}y$ ein unendlich kleiner Theil von y. Eben so ist das unendlich kleine Dreyeck npE in Bezug auf das Dreyeck CDE das Differenziale desselben, u. s. w.

Es ist demnach das Differenziale einer Größe als das allgemeine Glied einer unendlichen Reihe derselben anzusehen, woraus die Summe selbst, nach der weiter unten folgenden Lehre, gefunden werden kann.

Übrigens ist das Differenziale einer Größe bejahend, wenn diese wächst, verneinend aber, wenn sie abnimmt. So z. B. ist das Dif-

ferenziale eines Sinus bejahend oder positiv, wenn sein Bogen un-
Fig. ter 90°, verneinend oder negativ aber, wenn sein Bogen über 90°
146. wächst; wird hingegen der Bogen = 90°, so ist der Sinus am größten, gleich dem Halbmesser, also beständig, folglich sein Differenziale = 0.

Die Lehre, das Differenziale jeder einfachen und zusammengesetzten Function von einer oder mehren veränderlichen Größen zu bestimmen, heißt **Differenzial-Rechnung**, und die wirkliche Ausübung dieser Rechnung **differenziren**.

a) Die Differenzialen sowohl von zusammengesetzten Functionen, als von einzelnen Producten, Potenzen ꝛc. werden angedeutet, indem man sie in Klammern einschließt, und den Buchstaben d vorsetzt, als Zeichen, daß die in den Klammern befindlichen Größen zu differenziren sind. Z. B. $\mathrm{d}(xy)$; $\mathrm{d}(x^3)$; $\mathrm{d}\left(\frac{x}{a}\right)$; $\mathrm{d}(a+mx-y^2)$ u. dgl.

§. 277.

Durch das Differenziale einer Function will man erfahren, um was sich die ganze Function ändert, wenn jede der darin vorkommenden **veränderlichen** Größen um ihr Differenziale vermehrt oder vermindert werde. Zieht man von dieser **veränderten** Function die **gegebene** ab, so erhält man das Differenziale derselben, nämlich um was sich die Function durch diese Vermehrung oder Verminderung geändert habe. Es sey z. B. $Cm = x$, so ist

$$\mathrm{d}(x) = x + \mathrm{d}x - x = \mathrm{d}x = \left(mD = \frac{Cm}{\infty}\right);$$

oder $DE = y$; so ist $\mathrm{d}(y) = y - \mathrm{d}y - y = -\mathrm{d}y = \left(-pE = \frac{DE}{\infty}\right)$.

1) Desgleichen ist $\mathrm{d}(x - \frac{ay}{2} + 5z) =$

$$x + \mathrm{d}x - \frac{a}{2}(y + \mathrm{d}y) + 5(z + \mathrm{d}z) - (x - \frac{ay}{2} + 5z) =$$

$$x + \mathrm{d}x - \frac{ay}{2} - \frac{a\,\mathrm{d}y}{2} + 5z + 5\mathrm{d}z - x + \frac{ay}{2} - 5z =$$

$$\mathrm{d}x - \frac{a\,\mathrm{d}y}{2} + 5\mathrm{d}z,$$ wenn man gehörig reducirt (Nk. 144).

2) Eben so ist $\mathrm{d}(a + by - \frac{c}{3}z) =$

$$a + b(y + \mathrm{d}y) - \frac{c}{3}(z + \mathrm{d}z) - (a + by - \frac{c}{3}z) =$$

$$a + by + b\,\mathrm{d}y - \frac{c}{3}z - \frac{c}{3}\mathrm{d}z - a - by + \frac{c}{3}z = b\,\mathrm{d}y - c\,\mathrm{d}z;$$

weil die beständige Größe a selbst kein Differenziale hat, und auch

mit keinem verbunden ist, so erscheint sie im reducirten Differenziale nicht mehr. Fig. 146.

3) Daraus ist zu ersehen, daß man das Differenziale einer Function erhält, wenn man jede einzelne veränderliche Größe um sein Differenziale vermehrt (oder vermindert), und dieses mit den andern unveränderlichen Größen in den angezeigten Rechnungsarten verbindet, hierauf endlich die gegebene Function abzieht und gehörig reducirt. Dieses ist die allgemeine Regel der Differenzial-Rechnung, nach welcher sich jede Function differenziren läßt, von der die folgenden besondern Regeln abgeleitet, und nur Abkürzungen sind.

Die einzelnen Theile einer Function können nur Producte, Potenzen, Brüche oder Wurzelgrößen, und entweder in der Summe oder Differenz verbunden seyn; nun aber kann jeder Bruch von einem veränderlichen Nenner durch Übertragung desselben in den Zähler mit verändertem Zeichen seines Exponenten, als ein Product (Rk. 184. 3), und jede Wurzelgröße als eine Potenz mit gebrochenen Exponenten vorgestellt werden (Rk. 210.): also haben wir nur das Differenziale von Producten und Potenzen eigentlich zu bestimmen, um auch jenes von jeder noch so verwickelten Function zu haben.

4) Es sey das Product xy zu differenziren, so ist nach der obigen allgemeinen Regel:

$$d(xy) = (x + dx)(y + dy) - xy = xy + y\,dx + x\,dy + dx\,dy - xy = y\,dx + x\,dy,$$ weil das Glied $dx\,dy = \frac{x}{\infty} \cdot \frac{y}{\infty} = \frac{xy}{\infty^2}$ als eine unendlich kleine Größe einer höhern Ordnung $= 0$ verschwindet (Rk. 329 u. 330).

Eben so ist $d(xy) = (x - dx)(y - dy) - xy = -y\,dx - x\,dy$.

Desgleichen $d(xyz) = xy\,dz + xz\,dy + yz\,dx$.

Daraus folgt für das Differenziale eines Productes insbesondere die kurze Regel: Man multiplicirt das Differenziale eines jeden Factors mit allen übrigen Factoren, und addirt diese Producte bey bejahenden, subtrahirt sie aber bey verneinenden Differenzialen.

5) Ist dabey ein Factor, oder auch ein Glied, beständig (unveränderlich), so ist sein Differenziale $= 0$ (§. 276), daher auch

Fig. das Product oder auch das Glied aus seinem Differenziale in alle übrigen Factoren $= 0$.

Denn nach der allgemeinen Regel ist

$$d(ax) = (a + da)(x + dx) - ax = ax + x da + a dx + da dx - dx = x.0 + a dx + 0.dx = a dx.$$

Desgleichen ist $d\left(a + x - \frac{b}{2}\right) = dx$; weil sowohl die Differenzialen von a als von $\frac{b}{2} = 0$ sind.

6) Da eine Potenz ein Product von gleichen Factoren ist, so ist nach der vorigen Regel

$$d(x^3) = d(x.x.x) = (x + dx)(x + dx)(x + dx) - x^3 = (x^2 + 2x dx + dx dx)(x + dx) - x^3 = x^3 + 2x^2 dx + x dx dx + x^2 dx + 2x dx dx + dx dx dx - x^3 = 3x^2 dx,$$

weil die Differenzialen $x dx dx$, $2x dx dx$ und $dx dx dx$ als unendlich kleine Größen höherer Ordnungen verschwinden (Nr. 329 u. 330).

Das Differenziale einer jeden Potenz ist demnach ein Product aus drey Factoren: der Exponent der Potenz ist der erste Factor, die um 1 verminderte Potenz der zweyte, und das Differenziale der gegebenen einfachen Größe (oder Wurzel) ist der dritte Factor.

Daher ist allgemein $d(x^m) = m.x^{m-1}.dx$;

und $d(ax^2) = a.2x dx = 2ax dx$;

eben so $d\left(\frac{ax^4}{2}\right) = \frac{a}{2}.4x^3 dx = 2ax^3 dx$.

7) Nach der allgemeinen Regel ist

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{x + dx}{y + dy} - \frac{x}{y} = \frac{xy + y dx - xy - x dy}{y^2 + y dy} = \frac{y dx - x dy}{y^2},$$

wenn man auf gleiche Nenner bringt, und das Glied $y dy$ im Nenner als unendlich klein in Vergleichung y^2 hinweg läßt (Nr. 329).

Das Differenziale eines Bruches, dessen Zähler und Nenner veränderlich sind, erhält man kurz: wenn man den Nenner mit dem Differenziale des Zählers multiplicirt, davon das Product des Zählers in das Differenziale des Nenners abzieht, und diesen Unterschied durch das Quadrat des Nenners dividirt. Daher ist

$$d\left(\frac{x^3}{y^2}\right) = \frac{y^2 d(x^3) - x^3 d(y^2)}{y^4} = \frac{3y x^2 dx - 2x^3 dy}{y^3},$$ verm. oben 6)

und wenn gehörig reducirt wird; und allgemein ist

$\left(d\frac{ax^m}{y^n}\right) = \frac{max^{m-1}dx - nax^my^{-1}dy}{y^2}$. Fig.

8) Vermög Nr. 210 ist $\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$, und

$d(\sqrt[3]{x^2}) = d(x^{\frac{2}{3}}) = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}dx$, vermög oben 6); ferner

ist $\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-\frac{3}{3}}dx = \frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}}dx = \frac{2dx}{3x^{\frac{1}{3}}} = \frac{2dx}{3\sqrt[3]{x}}$; es ist also

$d(\sqrt[3]{x^2}) = \frac{2dx}{3\sqrt[3]{x}}$; und allgemein ist

$d(\sqrt[m]{x^n}) = d(x^{\frac{n}{m}}) = \frac{n}{m}x^{\frac{n}{m}-1}dx = \frac{ndx\sqrt[m]{x^n}}{mx}$.

9) Ist eine Potenz eines zusammengesetzten Ausdruckes zu differenziren, so wird derselbe ganz nach der Regel 6) für die Potenzen einzelner Größen differenzirt. So z. B. ist

$d\left(\frac{ax^2}{5} - y^3\right)^3 = 3\left(\frac{ax^2}{5} - y^3\right)^{3-1} \cdot d\left(\frac{ax^2}{5} - y^3\right) =$

$3\left(\frac{ax^2}{5} - y^3\right)^2\left(\frac{2axdx}{5} - 3y^2dy\right) = (6axdx - 9y^2dy)\left(\frac{ax^2}{5} - y^3\right)^2$.

§. 278.

Beyspiele zur Uebung.

1) $d(a - \frac{b}{2}x^2 + c^3) = -\frac{2bxdx}{2} = -bxdx$.

2) $d(ax - x^2) = adx - 2xdx$.

3) $d(\pm\sqrt{px}) = d(\pm\sqrt{p}\,.\,x^{\frac{1}{2}}) = \frac{\pm dx\sqrt{p}}{2\sqrt{x}}$.

4) $d(\sqrt{ax - x^2}) = d(ax - x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(ax - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot d(ax - x^2)$

$= \frac{adx - 2xdx}{2\sqrt{(ax - x^2)}}$.

5) $d(\sqrt{a^2 - x^2}) = d(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot d(a^2 - x^2) =$

$= \frac{-xdx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$.

6) $d\left[\sqrt{\frac{p}{2a}(2ax - x^2)}\right] = d\left(\frac{p}{2a}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot (2ax - x^2)^{\frac{1}{2}} =$

$= \frac{dx(a - x)\sqrt{\frac{p}{2a}}}{\sqrt{(2ax - x^2)}}$.

7) $d\left(x^3 + \frac{5y^2}{a}\right) = 3x^2dx + \frac{10ydy}{a}$.

Fig.

8) $d\left(\frac{x^2}{m} - \frac{y^3}{3}\right) = \frac{2x\,dx}{m} - y^2 dy.$

9) $d(B + Cn + Dn^2) = C\,dn + 2Dn\,dn = dn(C + 2nD).$

10) $d(Bn + Cn^2 + Dn^3) = B\,dn + 2Cn\,dn + 3Dn^2 dn = dn(B + 2nC + 3n^2 D).$

} wobey n als veränderlich betrachtet wird.

§. 279.

Sind zusammengesetzte Ausdrücke zu differenziren, so finden Anfänger darin eine Erleichterung, wenn sie einen solchen Ausdruck Einem Buchstaben gleich setzen, die Differenzirung nach den bekannten Regeln vollführen, und nachher die ursprünglichen Werthe wieder substituiren.

1) Es sey z. B. zu differenziren $\frac{4b}{3a}(a - x)(ax - x^2)^{\frac{1}{2}}$; man setze den beständigen Factor $\frac{4b}{3a} = m$, die veränderlichen $(a - x) = y$ und $ax - x^2 = z$, so ist $(ax - x^2)^{\frac{1}{2}} = z^{\frac{1}{2}}$; sonach ist

$dy = -dx$, vermög §. 277. 2)

$dz = a\,dx - 2x\,dx = (a - 2x)\,dx$ §. 277. 6)

und $dz^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(ax - x^2)^{-\frac{1}{2}}(a - 2x)\,dx$, vermöge 277. 8)

Hierauf ist

$d(myz^{\frac{1}{2}}) = my\,dz^{\frac{1}{2}} + mz^{\frac{1}{2}}dy + (z^{\frac{1}{2}}y\,dm = 0)$ (§. 277. 5);

also $d(myz^{\frac{1}{2}}) = my \cdot \frac{1}{2}(ax - x^2)^{-\frac{1}{2}}(a - 2x)\,dx + mz^{\frac{1}{2}} \cdot - dx.$

Setzen wir nun die ursprünglichen Werthe, so haben wir

$$d\left[\frac{4b}{3a}(a - x)(ax - x^2)^{\frac{1}{2}}\right] = d(myz^{\frac{1}{2}}) =$$

$$\frac{4b}{3a}\,\frac{(a - x)(a - 2x)\,dx}{2(ax - x^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{4b}{3a}(ax - x^2)^{\frac{1}{2}}.\,dx.$$

2) Es sey $\sqrt[3]{ax - y^2 + xz}$ zu differenziren.

Man setze $\sqrt[3]{(ax - y^2 + xz)} = u$; so ist $ax - y^2 + xz = u^3$, davon ist das Differenziale

$3u^2 du = a\,dx - 2y\,dy + x\,dz + z\,dx$; daraus ist

$$du = \frac{a\,dx - 2y\,dy + x\,dz + z\,dx}{3u^2}.$$

Setzt man nun für u den ursprünglichen Werth, so ist

$$d(\sqrt[3]{ax - y^2 + xz}) = \frac{a\,dx - 2y\,dy + x\,dz + z\,dx}{3\sqrt[3]{(ax - y^2 + xz)^2}}.$$

II. Anwendung der Differenzial-Rechnung auf die Bestimmung des größten und kleinsten Werthes der Functionen.

§. 280.

Es gibt Größen, die nicht stets fort wachsen, oder beständig fort abnehmen, sondern deren Differenzialen einen Augenblick aufhören und = 0 werden, dann aber in die entgegengesetzten sich ändern. So z. B. steigt ein in die Höhe geworfener Stein (oder eine Bombe) Anfangs immer höher und höher, sein Steigen ist einen Augenblick = 0, er fängt an zu fallen, bis er nach und nach wieder ein Ziel erreicht hat. Ebenso: der Sinus von 0 Grad ist am kleinsten, wächst bis 90 Grad, wo er am größten ist, nimmt dann über 90° wieder ab, bis er bey 180° wieder ein Kleinstes wird. Der Cosinus, als Function des Sinus betrachtet, beobachtet das entgegengesetzte Verhalten; er ist bey 0° dem Halbmesser gleich und am größten, nimmt aber während der Zunahme des Bogens und des Sinus immer mehr ab, bis er bey 90° ein Kleinstes = 0 wird, fängt über 90°, jedoch in entgegengesetzter Lage, wieder an zu wachsen, bis er bey 180° abermahl dem Halbmesser gleich und ein Größtes wird, u. s. dgl. Fig. 53.

Diese Zustände von Größen nun heißen größte und kleinste Werthe der Functionen. Eine Function ist am größten oder kleinsten eben da, wo ihr Differenziale in dem entgegengesetzten Zustande aus der bejahenden Bezeichnung (+) in die verneinende (—) oder umgekehrt sich ändert, wie z. B. der Sinus und Cosinus bey 90°. Manche Größen ändern aber ihre Bezeichnung nicht nur, wenn sie durch 0 gehen, sondern auch, wenn sie durchs Unendliche gehen, wie z. B. die Tangente wächst von 0° (am kleinsten) bis 90°, ist daselbst unendlich groß, wird sodann verneinend, bey 180° unendlich klein = 0, hierauf bejahend bis 270° unendlich groß, endlich wieder verneinend, bey 360° oder 0° unendlich klein = 0, u. s. w.

§. 281.

Da in solchen Zuständen die Differenzialen der Functionen kein Verhältniß zu einander haben, oder ihr Verhältniß = 0 ist, so können unter dieser Voraussetzung die Werthe des Größten oder Kleinsten leicht bestimmt werden; denn man darf nur das Verhältniß der Differenzialen = 0 setzen, und daraus bestimmen, was sich für eine oder die andere Function ergibt.

Fig. Eine leichte Methode, bey einer gegebenen Function denjenigen Werth der veränderlichen Größe x zu finden, der anstatt derselben in die Function gesetzt, das größte oder kleinste Resultat zum Vorschein bringt (wenn ein Größtes oder Kleinstes möglich ist), ist folgende:

Man differenzire die gegebene Function, bringe alle Glieder dieses Differenzials, wenn sie Brüche sind, auf gleichen Nenner, setze nun entweder den Zähler oder den Nenner dieses Differenzials $= 0$, und bestimme aus dieser Gleichung den Werth von x; so wird dieser gefundene Werth in der gegebenen Function statt x gesetzt, das größte oder kleinste Resultat zum Vorschein bringen, wenn diese Function eines solchen fähig ist.

Wenn aber weder aus dem Zähler noch aus dem Nenner, nachdem man jeden besonders $= 0$ gesetzt hat, ein möglicher Werth für x gefunden wird, d. h. wenn jede dieser zwey Gleichungen auf etwas Ungereimtes führen, so ist es ein Zeichen, daß die gegebene Function keines Größten oder Kleinsten fähig ist.

§. 282.

53. Ob bey einer gegebenen Function ein Größtes oder Kleinstes möglich sey, kann oft aus den Umständen der Aufgabe beurtheilt werden. So z. B. weiß man, daß aus verschiedenen Puncten der Kreislinie die auf ihren Durchmesser gezogenen Senkrechten verschieden groß sind, und da die Kreislinie in sich selbst geschlossen ist, so muß hier eine größte und kleinste Senkrechte möglich seyn. Nach §. 86 ist die Senkrechte $CD^2 = AD \,.\, DB$. Es sey der Kürze wegen der Durchmesser $AB = a$, die Abscisse $AD = x$, daher $DB = a - x$, und die Ordinate $CD = y$; so ist

$y^2 = x(a - x) = ax - x^2$, daher $y = \pm \sqrt{(ax - x^2)}$.

Nach §. 278. 4) ist

$dy = d(ax - x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(ax - x^2)^{-\frac{1}{2}} . \, d(ax - x^2)$; ferner

$dy = \frac{a\,dx - 2x\,dx}{2(ax - x^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{dx(a - 2x)}{2\sqrt{(ax - x^2)}}$, und vermög §. 280 ist

$\frac{dy}{dx} = \frac{a - 2x}{2\sqrt{(ax - x^2)}} = 0$. Setzt man insbesondere den Zähler

$a - 2x = 0$, so ist $a = 2x$, und $x = \frac{a}{2}$. Diesen Werth für x

in die vorige Gleichung gesetzt, ist $y = \pm \sqrt{a . \frac{a}{2} - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \pm \frac{a}{2}$.

Das heißt, in der Hälfte des Durchmessers eines Kreises ist die größte Senkrechte, und zwar, wegen $\pm$ in entgegengesetzter Richtung möglich, die zugleich der Halbmesser des Kreises ist. Fig 53.

Setzt man den Nenner $2\sqrt{(ax - x^2)} = 0$, so findet man $x = a$. Diesen Werth für x gesetzt, ist $y = \pm \sqrt{(a^2 - a^2)} = 0$; es ist nämlich an den Endpuncten des Durchmessers die Ordinate oder Senkrechte $= 0$. Daß nur bey den gefundenen Werthen für x die Eigenschaften des Größten und Kleinsten hier Statt finden, kann man sich überzeugen, wenn man im ersten Falle für $x = \frac{a}{2} \pm e$, im zweyten aber $x = a \pm e$ in die gegebene Gleichung setzt (wobey e einen beliebigen gleichnamigen Theil von a bezeichnen kann), so findet man stets $y = \sqrt{-e^2}$, eine unmögliche Größe.

Es ist also die Kreislinie eine in sich selbst geschlossene krumme Linie (§. 11).

§. 283.

Beyspiele zur Uebung.

1) Eine gegebene Zahl a (z. B. 10), oder auch eine gerade Linie in zwey solche Theile zu theilen, daß ihr Product ein Größtes wird.

Es sey ein Theil $= x$, so ist der zweyte Theil $= a - x$, und ihr Product $= x(a - x) = ax - x^2$. Da das Product beständig seyn soll, so ist sein Differenziale $= 0$, vermög §. 276;

$$\text{also } d(ax - x^2) = a dx - 2x dx = 0$$
$$\text{oder } dx(a - 2x) = 0$$
$$\text{oder } a - 2x = 0$$
$$\text{daraus folgt } x = \frac{a}{2},$$

d. h. wenn man die gegebene Gerade halbirt, so enthält bey demselben Umfange das Quadrat die größte Fläche. Und von der Zahl 10 ist 5.5 das größte Product.

2) Wenn man im Forstfache die Holzmasse, welche gegenwärtig auf einer gewissen Fläche lebend vorhanden ist, durch das Alter derselben dividirt, so gibt der Quotient den 1jährigen durchschnittlichen Zuwachs an, der vom 1ten Lebensjahre des Holzes bis zum gegenwärtigen Alter, ein Jahr in das andere gerechnet, erfolgt ist. Zieht man vom gegenwärtigen Holzvorrathe die um 1 Jahr jüngere Holzmasse ab, so ist die Differenz der gegenwärtige 1jährige wirkliche Holzzuwachs.

Fig. Soll nun für eine gegebene Holzart und ihre Bewirthschaftungsweise die Zeit bestimmt werden, in welcher der Durchschnittszuwachs $= z$ am größten ist, so sey ihre gegenwärtige Holzmasse $M = t_n = nB + n^2 C + n^3 D$, vermög Nk. 314, und man erhält den Durchschnittszuwachs $= z$, wenn man die gegenwärtige Holzmasse durch ihr Alter n dividirt; es ist also

$$\frac{M}{n} = \frac{nB + n^2 C + n^2 D}{n} = z,$$

oder $z = B + nC + n^2 D.$

Läßt man nun die Zeit um ihr Differenziale wachsen, so wird auch der davon abhängende Holzzuwachs um sein Differenziale sich ändern und $= 0$ seyn; es ist nämlich nach §. 277 u. 278. 9)

$$dz = d(B + nC + n^2 D) = C dn + 2nD dn = dn(C + 2nD),$$

oder $\frac{dz}{dn} = C + 2nD$; (Nk. 72. Grunds. I.) es ist aber

$\frac{dz}{dn} = 0$, vermög §. 281, also auch

$C + 2nD = 0$ (Nk. 40. Grunds. III.); daraus findet man $n = -\frac{C}{2D}$. Setzt man für C und D ihre Werthe aus Nk. 321, so ist

$$n = -\frac{3{,}50396}{2 \cdot -0{,}01784} = 98 \text{ Jahre.}$$

Es erfolgt also bey obigen Bedingungen der größte Durchschnittszuwachs im 98. Jahre.

3) Der jährliche wirkliche Zuwachs $= z'$ wird gefunden, wenn man von der gegebenen Holzmasse M, die um 1 Jahr jüngere Holzmasse $= M'$ abzieht; es ist nämlich

$$M = nB + n^2 C + n^3 D,$$

und $M' = (n-1)B + (n-1)^2 C + (n-1)^3 D = nB - B + n^2 C - 2nC + C + n^3 D - 3n^2 D + 3nD - D$,

und ferner ist

$M - M' = B + D - C + 2nC - 3nD + 3n^2 D = z'$,

nach gehöriger Reduction,

oder $z' = B + D - C + n(2C - 3D) + n^2 . 3D$; und

$dz' = dn(2C - 3D) + 2n dn \cdot 3D$, oder

$\frac{dz'}{dn} = 2C - 3D + 6nD = 0$; daraus folgt

$n = \frac{3D - 2C}{6D} = \frac{1}{2} - \frac{C}{3D}$. Setzen wir für C und D die obigen Werthe, so wird $n = \frac{1}{2} - \frac{3{,}50396}{3 \cdot -0{,}01784} = \frac{1}{2} + \frac{350396}{5352} =$

$\frac{1}{2} + 65,4 = 66$; es findet also hierbey der größte jährliche Zuwachs im 66. Jahre Statt. Fig.

4) Die Zeit, wann der jährliche wirkliche Zuwachs $= 0$ wird (oder der Zuwachs im Ganzen unbedeutend wird), finden wir, wenn wir die obige betreffende Gleichung $= 0$ setzen, und daraus die Zeit entwickeln *); es wird demnach seyn:

$z' = B + D - C + n(2C - 3D) + n^2 . 3D = 0$; und daraus ist

$$n = -\frac{2C-3D}{6D} + \sqrt{\left[-\left(\frac{B+D-C}{3D}\right) + \left(\frac{2C-3D}{6D}\right)^2\right]}.$$

Setzen wir aus Nk. 321 die bekannten Werthe:

für $B = -\ 87,33259$
„ $C = +\ 3,50396$
und „ $D = -\ 0,01784$,

so erhalten wir $n = 65,97 + 51,52 = 117,49$, nahe 117 Jahre.

5) Die Zeit, in welcher die größte Holzmasse, und also auch der größte Holzvorrath erfolgt, wird annähernd *) gefunden, wenn man die Gleichung der Holzmasse (Nk. 320) nach §. 277 und 278 differenzirt, $= 0$ setzt, und die Anzahl der Jahre n daraus bestimmt.

Es ist nämlich $M = t_n = nB + n^2 C + n^3 D$ (Nk. 320),
und $dM = dn(B + 2nC + 3n^2 D)$, verm. §. 278. 10).
hierauf $\frac{dM}{dn} = B + 2Cn + 3n^2 D = 0$, verm. §. 281.
daraus findet man $n = -\frac{C}{3D} + \sqrt{-\frac{B}{3D} + \left(\frac{C}{3D}\right)^2}$, Nk. 229.

Setzt man für B, C und D die obigen Werthe, so ist

$$n = \frac{-3,50396}{3 . -0,01784} + \sqrt{\left[\frac{+87,33259}{3 . -0,01784} + \left(\frac{3,50396}{3 . -0,01784}\right)^2\right]} =$$

$65,46 + 51,51 = 116,97$ nahe 117 Jahre. Man lese unten bey *).

Vergleichen wir beyde unter 4) und 5) entwickelten Zeiten, so erhellet, daß sie nur in den Dezimalstellen abweichen, was der Natur der Sache auch entspricht, weil sodann der jährliche Zuwachs nach 117 Jahren negativ wird, wovon man sich leicht überzeugt, wenn man in Nk. 321 in die dortige Gleichung

*) Es ist auch hier das Nk. 319 unter a) Gesagte wohl zu beachten. Will man hiervon wirklich Gebrauch machen, so ist unerläßlich nöthig, einen Ansatz vom höchsten Holzalter des schlagbaren Holzes eines Forstes für die obige Gleichung zu erhalten, um auf ein der Wahrheit möglichst nahe kommendes Resultat rechnen zu können.

Fig. $M = t_n = a + \frac{(n-u)\Delta^1}{1} + \frac{(n-u)(n-u-1)\Delta^2}{1.2} + \frac{(n-u)(n-u-1)(n-u-2)\Delta^3}{1.2.3}$, für $n = 117$, $u = 60$ und die dortigen Werthe für a, Δ^1, Δ^2 und Δ^3 setzt; woraus im 117. Jahre die Holzmasse $M = 9165,79$, im 120. Jahre aber nur 9144,85 Kbfß. folgt, also die Holzmasse schon geringer wird.

Da beyde Gleichungen einerley Resultat geben, so kann die letztere unter 5) als die einfachere, erforderlichen Falles, gewählt werden.

6) In einen Kreis das größte Rechteck einzuzeichnen, oder aus einem kreisrunden Baumstamme den größten 4kantigen Balken heraus zu schneiden.

147. Es sey der Durchmesser $AB = a$ und $AD = x$ von der Beschaffenheit, daß mittelst der Senkrechten CD das gesuchte Rechteck EC verzeichnet werden könne; so ist $DB = a - x$, und $CD^2 = AD \cdot DB = ax - x^2$ (§. 86. 1). Ferner ist $AC = \sqrt{(AD^2 + DC^2)} = \sqrt{ax}$, und $CB = \sqrt{(a^2 - ax)}$, (§. 86. 2); folglich ist das Rechteck $EC = AC \cdot CB = \sqrt{ax} \cdot \sqrt{(a^2 - ax)} = \sqrt{ax(a^2 - ax)} = (a^3 x - a^2 x^2)^{\frac{1}{2}}$; davon ist das Differenziale =

$$\tfrac{1}{2} \cdot (a^3 x - a^2 x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot \mathrm{d}(a^3 x - a^2 x^2) = \frac{a^3\,\mathrm{d}x - 2a^2 x\,\mathrm{d}x}{2(a^3 x - a^2 x^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Setzt man den Zähler = 0, so ist $x = \frac{1}{2}a$; es ist also $x = AD = \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}AB$, und folglich das gesuchte Rechteck ein Quadrat, und zugleich die Durchschnittsfläche des größten 4kantigen Balken.

Dieser Balken wird jedoch nicht der stärkste seyn, wenn er in horizontaler Lage, an beyden Enden unterstützt, eine Last tragen soll. Für einen solchen Fall läßt sich der stärkste Balken bestimmen, wenn man aus der Mechanik als bekannt annimmt, daß die Stärke eines 4kantigen Balkens dem Producte gleich ist, wenn man das Quadrat der Höhenkante, CB^2, mit der Grundlinie oder Auflagskante AC multiplicirt.

In dieser Voraussetzung kann die Stärke S dieses Balkens, wenn er mit der schmalen Seite AC aufliegt, also ausgedrückt werden:

$$S = CB^2 . AC = (a^2 - ax)\sqrt{ax} = (a^2 - ax) \cdot a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{5}{2}} x^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{3}{2}} x^{\frac{3}{2}};$$

und $dS = \frac{1}{2} a^{\frac{5}{2}} x^{\frac{1}{2}-1} dx - \frac{3}{2} a^{\frac{3}{2}} x^{\frac{3}{2}-1} dx$; ferner Fig. 147.

$$\frac{dS}{dx} = \frac{a^{\frac{5}{2}} x^{-\frac{1}{2}}}{2} = \frac{3 a^{\frac{3}{2}} x^{\frac{1}{2}}}{2} = 0,$$

daher $a^{\frac{5}{2}} x^{-\frac{1}{2}} = 3 a^{\frac{3}{2}} x^{\frac{1}{2}}$;

oder $\sqrt{a^5 x^{-1}} = 3 \sqrt{a^3 x}$; (Rk. 207. 1) und 210. 2)

oder $\frac{a^5}{x} = 9 a^3 x$ (Rk. 219. 2) und 184. 3); daraus folgt

endlich $x = \frac{1}{3} a$; es ist nämlich $AD = \frac{1}{3} AB$.

Diesem nach muß man den Durchmesser in drey gleiche Theile theilen, und in dem 1ten Theilungspuncte D die Senkrechte DC errichten, um den Durchschnitt desjenigen 4kantigen Balkens zu erhalten, der mit der schmalen Kante AC aufgelegt, die möglich größte Last zu tragen im Stande ist.

Da $AC = \sqrt{ax}$, $CB = \sqrt{(a^2 - ax)}$, und $x = \frac{1}{3} a$ ist, so verhält sich $AC : CB = \sqrt{ax} : \sqrt{(a^2 - ax)} = \sqrt{\frac{1}{3} a^2} : \sqrt{(a^2 - \frac{1}{3} a^2)}$,

oder $AC : CB = \sqrt{\frac{a^2}{3}} : \sqrt{\frac{2a^2}{3}} = a\sqrt{\frac{1}{3}} : a\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{1}{3}} : \sqrt{\frac{2}{3}}$,

oder $AC : CB = 1 : \sqrt{2}$, vermög §. 253. 4)

oder $AC : CB = 2 : 2\sqrt{2}$, oder nahe wie $2 : 3$. In diesem Falle verhält sich nämlich die Auflagskante zur Höhenkante wie $2 : 3$.

7) Ein senkrechtes Parallelepiped soll einen Kubikraum von $k = 40000$ Kubikfuß in sich fassen, seine Länge ist $a = 64$ Fuß, wie lang soll seine Breite werden? daß die äußere Oberfläche dieses Körpers die Kleinste werde.

Es sey die zu suchende Breite $= x$ Fuß,
die Oberfläche . . . . $= y$ Quadratfuß,
so ist die Grundfläche des Körpers $= a \cdot x$,
und seine Höhe $= \frac{k}{a \cdot x}$, vermög §. 196. Ferner ist die auf der Länge der Grundfläche vertikal stehende Seitenfläche $= a \cdot \frac{k}{a \cdot x} = \frac{k}{x}$; und die auf der Breite der Grundfläche vertikal stehende Seitenfläche $= x \cdot \frac{k}{a \cdot x} = \frac{k}{a}$; folglich ist die aus 6 Rechtecken bestehende Oberfläche, wobey je zwey einander gleich sind, nämlich

$y = 2ax + \frac{2k}{x} + \frac{2k}{a} = \frac{2ax^2 + 2k}{x} + \frac{2k}{a}$. Nach §. 277. 7) ist

$$dy = \frac{4ax^2 dx - 2ax^2 dx - 2k dx}{x^2}, \text{ und ferner}$$

$$\frac{dy}{dx} = 4ax^2 - 2ax^2 - 2k = 0; \text{ daraus folgt}$$

Fig. 147. $x^2 = \frac{2k}{4a - 2a} = \frac{k}{a}$, und endlich $x = \sqrt{\frac{k}{a}}$; man muß also den Kubikinhalt des Körpers durch seine gegebene Länge dividiren, und aus dem Quotienten die Quadratwurzel ziehen, um die Breite der Grundfläche zu erhalten; es ist nämlich $x = \sqrt{\frac{40000}{64}} = 25$ Fuß.

Vermög des Vorigen ist die Höhe $= \frac{k}{a \cdot x} = \frac{40000}{64 \cdot 25} = 25$ Fuß; also muß die Breite gleich der Höhe gemacht werden, um der gegebenen Forderung zu genügen.

8) Aus einem geraden Kegel die größte parabolische Fläche heraus zu schneiden.

141. Es sey $RK = RN = a$, $KN = b$ und $RA = x$, so ist $AN = a - x = AG$, weil das Dreyeck GAN gleichschenkelig ist.

Da die parabolische Fläche $F = CABC = \frac{4}{3} AG \,.\, GB$ ist (siehe §. 287.), so kommt es darauf an AG und GB zu bestimmen. In den ähnlichen Dreyecken KRN und GAN verhält sich $RN : KN = AN : GN$, daraus ist

$$GN = \frac{KN \,.\, AN}{RN} = \frac{b(a-x)}{a}, \text{ und}$$

$$KG = KN - GN = b - \frac{b(a-x)}{a} = \frac{ab - ab + bx}{a} = \frac{bx}{a}.$$

Vermög §. 86 unter 1) ist ferner $GB^2 = KG \,.\, GN = \frac{bx}{a} \cdot \frac{b}{a}(a-x) = \frac{b^2}{a^2} x(a-x)$, und $GB = \frac{b}{a}\sqrt{(ax - x^2)}$; diese Werthe oben für GB und AG substituirt, so ist

$$F = \tfrac{4}{3} AG \,.\, GB = \tfrac{4}{3}(a-x) \,.\, \frac{a}{b}\sqrt{(ax - x^2)} =$$
$$\frac{4b}{3a}(a-x)(ax - x^2)^{\frac{1}{2}},$$

vermög §. 279 ist das Differenziale

$$dF = d\left[\frac{4b}{3a}(a-x)(ax-x^2)^{\frac{1}{2}}\right] = \frac{4b}{3a} \cdot \frac{(a-x)(a-2x)\,dx}{2(ax-x^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{4b}{3a}(ax-x^2)^{\frac{1}{2}} dx;$$

für $\frac{dF}{dx} = 0$ ist ferner $\frac{4b}{3a} \cdot \frac{(a-x)(a-2x)}{2\sqrt{(ax-x^2)}} = \frac{4b}{3a} \cdot \sqrt{(ax - x^2)}$, oder $(a-x)(a-2x) = 2ax - 2x^2$, wenn man gehörig abkürzt; daraus findet man endlich

$$x = \frac{5a}{8} \pm \sqrt{\left(-\frac{a^2}{4} + \frac{25a^2}{64}\right)} = \frac{5a}{8} \pm \frac{3a}{8} = \frac{2a}{8} = \frac{a}{4}, \text{ weil}$$

hier das Zeichen $-$ genommen werden muß.

Dritter Abschnitt.

Von der Integral-Rechnung.

I. Begriffe und allgemeinste Regeln.

§. 284.

Ist eine Function von einer oder mehren veränderlichen Größen durch die Differenzialen derselben ausgedrückt, so heißt sie eine Differenzialgröße, wie z. B. $dx - a^2 dy + 2b\,dz$; und eine Gleichung zwischen Differenzial-Größen wird eine Differenzial-Gleichung genennt, wie z. B. $dy = d(ax) = a\,dx$. Fig.

Da die Differenzial-Größe einer Function als das allgemeine Glied einer unendlichen Reihe anzusehen ist (§. 276.); so muß man erforderlichen Falles aus einer gegebenen Differenzial-Größe die Function oder die endliche Größe, welche man auch das Integrale nennt, wieder herstellen; das Verfahren hierbei heißt man integriren oder auch summiren. Aus diesem Grunde wird die Forderung zu einem gegebenen Differenziale die zugehörige Function, das Integrale zu finden, durch den Buchstaben $\int$ angezeigt, den man der Differenzialgröße vorsetzt. So z. B. wird das Integrale von $dx + \frac{a}{2}dy - 5\,dz$ angezeigt durch $\int(dx + \frac{a\,dy}{2} - 5\,dz)$.

Aus dieser Erklärung des Integrales einer Differenzialgröße folgt nun klar, daß man beim Integriren das umgekehrte Verfahren von der Differenzial-Rechnung anzuwenden habe, und daß man aus einer gegebenen Differenzialgröße das Integrale derselben sogleich hinschreiben könne, wenn man aus Gründen des vorhergehenden Abschnittes die Function kennt, durch deren Differenzirung die gegebene Differenzialgröße entstanden ist. So z. B. ist $\int(dx + \frac{a}{2}dy - 5\,dz) = x - \frac{a}{2}y - 5z$. Man kann demnach die Richtigkeit eines gefundenen Integrales dadurch prüfen, indem man dasselbe differenzirt, und sieht, ob dieses erhaltene Differenziale mit der gegebenen Differenzialgröße übereinstimmt; wird nämlich das vorstehende Integrale $x + \frac{a}{2}y - 5z$ nach §. 277 differenzirt, so erhält man genau den gegebenen Differenzial-Ausdruck $dx + \frac{a}{2}dy - 5\,dz$.

Fig.

§. 285.

Nach dem so eben Gesagten ist $\int a\,\mathrm{d}x = ax$; es kann aber auch $\int a\,\mathrm{d}x = ax \pm m$ oder auch $\int a\,\mathrm{d}x = ax + 2ab - c^2$ u. s. w. gesetzt werden; weil jedes von diesen Integralen durch die Differenzirung $a\,\mathrm{d}x$ gibt, indem nach §. 276 die unveränderlichen Glieder einer Function kein Differenziale haben, und also in der Differenzialgröße gar nicht erscheinen. Da es also aus der gegebenen Differenzialgröße nicht ersichtlich ist, ob die zugehörige Function, die durch das Integriren hergestellt werden soll, auch veränderliche Glieder enthalten habe, so setzt man jedem gefundenen Integrale noch + C (Constans) bey, um das vollständige Integrale (die ursprüngliche Function) zu erhalten; wobey C diejenige unveränderliche positive oder negative Größe bedeutet, welche man jedes Mahl aus den Umständen und Bedingungen der Aufgabe zu bestimmen hat, wie an seinem Orte erhellen wird. In vielen Fällen ist $C = 0$. In den oben angeführten Beyspielen ist demnach $\int a\,\mathrm{d}x = ax + C$. Übrigens ist es einerley, ob C auf einer oder der andern Seite des Gleichheitzeichen zu stehen kommt. Aus der Differenzial-Gleichung $\mathrm{d}y = a\,\mathrm{d}x$ folgt nämlich $y = ax + C$ oder auch $y + C = ax$. In der Folge werden wir, um Weitläufigkeiten zu vermeiden, gewöhnlich die Differenzial-Größen für sich allein betrachtet integriren, ohne dieselben als Differenzial-Gleichungen ausdrücklich anzusetzen, und auch C nur bey der wirklichen Anwendung beysetzen, wo zugleich dessen Werth bestimmt werden wird.

§. 286.

Folgende Grundregeln der Integral-Rechnung werden zu unserm vorhabenden Zwecke, zureichend seyn, aus gegebenen Differenzial-Größen die zugehörige Function zu finden.

1) Ein einfacher Differenzial-Ausdruck von einer einzigen veränderlichen Größe kann, als Potenz betrachtet, nach §. 277. 6) nur ein Product aus drey Factoren seyn; es ist nämlich $\mathrm{d}(x^3) = 3x^{3-1}\,\mathrm{d}x = 3x^2\,\mathrm{d}x$. Will man im umgekehrten Falle davon das Integrale haben, so muß bey der veränderlichen Größe x der Exponent um 1 vermehrt, und nachher der ganze Ausdruck durch das Product aus den vermehrten Exponenten in das Differenziale dividirt werden: der abgekürzte Ausdruck endlich ist das gesuchte Integrale oder die ursprüngliche Function. Diesemnach ist $\int 3x^2\,\mathrm{d}x = \frac{3x^{2+1}\,\mathrm{d}x}{(2+1)\,\mathrm{d}x} = \frac{3x^3\mathrm{d}x}{3\,\mathrm{d}x} = x^3$.

Man vergleiche §. 277 unter 6); daher ist allgemein: Fig.

$$\int m x^{m-1}\,dx = \frac{m x^{m-1+1}\,dx}{m\,dx} = x^m.$$

2) Ist die gegebene Differenzial-Größe nur einfach, so setzt man in umgekehrter Weise des §. 277 für das Differenziale der Größe die ursprüngliche Größe selbst; es ist nämlich $\int dx = x$. Denn vermög Nr. 183 ist $dx = x^0\,dx$; und vermög der vorigen Regel ist

$$\int x^0\,dx = \frac{x^{0+1}\,dx}{1.\,dx} = x^1 = x.$$

3) Enthält ein Differenzial-Ausdruck mehre Glieder, wobey in jedem Gliede nur eine einzige veränderliche Größe vorkommt, so kann jedes Glied nach der vorigen Regel integrirt werden, weil solche Glieder in keiner andern als der angezeigten Verbindung stehen, es ist z. B.

$$\int(dx - dy + \ldots + dz) = \int dx - \int dy + \ldots + \int dz = x - y + \ldots + z.$$

4) Wenn in einem Differenzial-Ausdrucke beständige Größen als Factoren desselben vorkommen, so müssen sie auch Factoren des Integrale seyn, und können auf die Gestalt des gesuchten eigentlichen Integrale keinen Einfluß haben. Diesemnach ist

$$\int a\,dx = a.\int dx = ax;$$

desgleichen ist $\int(2a^2\,dx - \frac{2}{3}b\,dy) = 2a^2\int dx - \frac{2}{3}b.\int dy = 2a^2x - \frac{2}{3}by.$

5) Die Differenzialen von Producten und Quotienten veränderlicher Größen sind leicht zu erkennen, weil diese wechselweise mit ihren einfachen Differenzialen multiplicirt sind. Sie dürfen daher nicht als abgesonderte Glieder, wie oben unter 3), sondern müssen im Zusammenhange behandelt werden. Es ist nämlich $\int(y\,dx + x\,dy) = xy$. Denn vermög der Regel 1) und 2) ist

$$\int(y\,dx + x\,dy) = \int(y x^0\,dx + x y^0\,dy) = \frac{y x\,dx + x y\,dy}{1.\,dx + 1.\,dy} = \frac{xy(dx + dy)}{dx + dy} = xy.$$

Auf ähnliche Weise findet man $\int(xz\,dy + xy\,dz + zy\,dx) = xyz$.

6) $\int\frac{(y\,dz - z\,dy)}{y^2} = \frac{z}{y}$. Denn nach der Regel 1) und 2) ist

$$\int\left(\frac{y\,dz - z\,dy}{y^2}\right) = \int\left(\frac{y z^0\,dz - z y^0\,dy}{y^2}\right) = \frac{yz\,dz - zy\,dy}{y^2(dz - dy)} = \frac{yz(dz - dy)}{y^2(dz - dy)} = \frac{yz}{y^2} = \frac{z}{y}.$$

Fig. 7) Enthält ein gegebenes Differenziale einen mehrtheiligen Ausdruck, dessen Coefficient durch das Differentiale eben dieses mehrtheiligen Ausdruckes dividirt, einen beständigen Quotienten gibt; so kann der mehrtheilige Ausdruck selbst als nur Eine veränderliche Größe angesehen, und nach oben 1) integrirt werden. So z. B. ist bey der Differenzial-Größe $a\,dx\,(b+cx)^m$ nach dem so eben Gesagten $\frac{a\,dx}{c\,dx}=\frac{a}{c}$ ein beständiger Quotient, daher

$$\int a\,dx\,(b+cx)^m=\frac{a\,dx\,(b+cx)^{m+1}}{(m+1)\,c\,dx}=\frac{a\,(b+cx)^{m+1}}{c\,(m+1)}.$$ Eben so ist

$$\int ax\,dx\,(a+bx^2)^{-3}=\frac{ax\,dx}{-2.2bx\,dx}\cdot(a+bx^2)^{-2}=-\frac{a}{4b\,(a+bx^2)^2}.$$

Desgleichen ist $\int\frac{a\,dx-2x\,dx}{2\sqrt{(ax-x^2)}}=\int\frac{(a\,dx-2x\,dx)\,(ax-x^2)^{-\frac{1}{2}}}{2}=$

$$\frac{\frac{1}{2}(a\,dx-2x\,dx)\,(ax-x^2)^{-\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}(a\,dx-2x\,dx)}=(ax-x^2)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{(ax-x^2)}.$$

Auch ist $\int-\frac{x\,dx}{(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}=-\frac{x\,dx\,(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}.-2x\,dx}=$

$$(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{(a^2-x^2)}.$$

8) So wie es irrationale Größen gibt, aus welchen die Wurzel nicht vollkommen bestimmt werden kann, eben so gibt es auch Differenzialen, die sich nicht genau integriren, sondern nur annäherungsweise mittelst unendlicher Reihen bestimmen lassen. Es sey z. B. das Integrale von $\frac{3m\,dx}{a+x}=dx\left(\frac{3m}{a+x}\right)$ zu bestimmen. Nach Nr. 156 und 327 ist

$$\frac{3m}{a+x}=\frac{3m}{a}-\frac{3mx}{a^2}+\frac{3mx^2}{a^3}-\frac{3mx^3}{a^4}+\frac{3mx^4}{a^5}-+\ldots$$

und $dx=dx$, (Nr. 40. Grunds. II.) daher

$$dx\left(\frac{3m}{a+x}\right)=\frac{3m\,dx}{a}-\frac{3mx\,dx}{a^2}+\frac{3mx^2\,dx}{a^3}-\frac{3mx^3\,dx}{a^4}+\ldots$$

folglich $\int\frac{3m\,dx}{a+x}=\frac{3mx}{a}-\frac{3mx^2}{a^2}+\frac{3mx^3}{a^5}-\frac{3mx^4}{a^4}+-\ldots$

II. Anwendung der Integral-Rechnung auf die Bestimmung des Inhaltes einiger Flächen und Körper, welche krummlinig begrenzt sind.

§. 287.

Aufgabe. Eine allgemeine Gleichung aufzustellen, für den Flächenraum einer jeden krummen Linie von senkrechten Ordinaten.

Auflösung. Es sey bey der krummen Linie $M'AM$ die Abscisse $AP = x$, $PM = y$ und der gesuchte Flächenraum $MAPM = F$. Fig. 148.
Man denke pm unendlich nahe bey PM, so ist $Pp = dx$, $Mq = dy$ und $PpMm = dF$. Da aber der Bogen Mm, von einer Geraden nicht unterschieden werden kann, so ist das Trapez $PpMm = \frac{1}{2}(PM + pm) . Pp = \frac{1}{2}[(y + y - dy) . dx = \frac{1}{2}(2y - dy) . dx = y dx$, weil dy in Hinsicht auf $2y$ für 0 anzusehen ist; folglich ist $dF = y dx$, und endlich $F = \int y dx + C$........... (A)

1) Nach dieser Gleichung läßt sich der Flächenraum bey einer jeden krummen Linie von senkrechten Ordinaten finden, wenn man aus der Gleichung für die krumme Linie anstatt y den Werth durch x ausgedrückt substituirt, und hierauf das Integrale nach den gegebenen Regeln entwickelt. So z. B. ist bey der Parabel $y = \sqrt{px} = p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}$, folglich wenn man in der vorigen Gleichung (A) für y, substituirt: $F = \int p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx = p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}+1} dx : \frac{3}{2} dx = \frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} + C$. Nun aber ist für $F = 0$ auch $x = 0$, wie auch $C = 0$, also ist $F = \frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} . x = \frac{2}{3} x . y$; folglich die Fläche der ganzen Parabel $M'AMM' = \frac{4}{3} xy$.

Soll die Fläche $MtrP = F'$ bestimmt werden, so sey $Ar = u$ und $rt = z$, so ist vermöge des Vorigen

die Fläche $Art = \frac{2}{3} u . z$
und die Fläche $APM = \frac{2}{3} x . y$

folglich die Fläche $MtrP = APM - Art = \frac{2}{3} xy - \frac{2}{3} uz = F'$
oder $F' = \frac{2}{3}(xy - uz)$.

2) Auch die Flächeninhalte von geradlinigen Figuren lassen sich nach der obigen Gleichung bestimmen.

Es sey z. B. im Dreyecke ABC die Gerade $AB = a$, $CG = h$, 146.
$mn = y$ und $Cr = x$, so verhält sich $a : h = y : x$ und es ist $y = \frac{ax}{h}$. Setzt man diesen Werth für y in die obige Gleichung (A), so ist $F = \int \frac{ax dx}{h} = \frac{ax^2}{2h} + C$. Für $F = 0$ ist auch x und $C = 0$; und geht endlich x in h über, so ist $F = \frac{ah^2}{2h} = a . \frac{h}{2} = AB . \frac{CD}{2}$ wie §. 135.

3) Der Inhalt eines Parallelogramm besteht aus zwey gleichen Dreyecken, daher muß ein auf vorige Weise bestimmtes Dreyeck doppelt genommen werden, um den gehörigen Flächeninhalt desselben zu erhalten. Und so ähnlich bey Bestimmung jeder andern geradlinigen Figur.

Fig. §. 288.

Aufgabe. Eine allgemeine Gleichung für die Oberfläche derjenigen Körper zu finden, welche durch die Umdrehung krummer Linien von senkrechten Ordinaten entstehen.

148. Auflösung. Es sey $M'AM$ ein solcher Körper, der durch die Umdrehung der krummen Linien AtM um die Abscissenlinie AP erzeugt wird, $AP = x$, $PM = y$, und die krumme Oberfläche, welche bey der Umdrehung durch den Bogen AtM entsteht, $= O$; so ist das Differenziale (oder das letzte Element) dieser Oberfläche als die krumme Oberfläche des abgekürzten Kegels $M'm'mM$, der durch die Umdrehung des Trapez $pmMP$ erzeugt wird. Da man mM als eine Gerade ansehen kann, so ist $Mm^2 = mq^2 + qM^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2$.

Vermög §. 188 ist die krumme Oberfläche dieses abgekürzten Kegels $= (PM + pm) . \pi . Mm = (y + y - \mathrm{d}y)\,\pi . (\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2)^{\frac{1}{2}} = 2y\pi(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2)^{\frac{1}{2}}$; folglich ist des Körpers krumme Oberfläche $=$

$$\int 2y\pi(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2)^{\frac{1}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

1) Ist z. B. die Krumme $M'AM$ eine Parabel,

so ist $\mathrm{d}x = \frac{2y\,\mathrm{d}y}{p}$

und $\mathrm{d}x^2 = \frac{4y^2\,\mathrm{d}y^2}{p^2}$, daher die

$$\text{Oberfläche} = \int 2y\pi\left(\frac{4y^2\,\mathrm{d}y^2}{p^2} + \mathrm{d}y^2\right)^{\frac{1}{2}} = \int 2y\pi\left(\frac{4y^2\,dy^2}{p^2} + \frac{4dy^2\,p^2}{4p^2}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$\int \frac{4\pi y\,\mathrm{d}y}{p}\left(y^2 + \frac{p^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{4\pi}{3p}\left(y^2 + \frac{p^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}} + \mathrm{C},$$

vermög §. 286 unter 7). Wird die Oberfläche $= 0$, so ist auch $y = 0$, daher

$$0 = \frac{4\pi}{3p} . \frac{p^3}{8} + \mathrm{C} = \frac{p^2\pi}{6} + \mathrm{C}, \text{ und endlich}$$

$\mathrm{C} = -\frac{p^2\pi}{6}$; folglich ist die Oberfläche des Paraboloids $=$

$$\frac{4\pi}{3p}\left(\frac{4y^2 + p^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{p^3\pi}{6p} = \frac{6p}{\pi}(4y^2 + p^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{p^3\pi}{6p} =$$

$$\frac{\pi}{6p}\,[(4y^2 + p^2)^{\frac{3}{2}} - p^3].$$

2) Werden im Kreise die Abscissen vom Mittelpunct gerechnet, so ist für den Halbmesser a vermög §. 90 II.

$y = (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$, und nach §. 278. 5) ist $dy = \frac{-x\,dx}{(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}}$, Fig. 148.

daher $dy^2 = \frac{x^2\,dx^2}{a^2 - x^2}$.

Setzt man diese Werthe für y und dy^2 in die obige Gleichung (A), so ist die Oberfläche der durch die Krumme tM beschriebene Zone $MM'st$ =

$$\int 2y\pi\,(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}} = \int 2\pi\,(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}\left(dx^2 + \frac{x^2\,dx^2}{a^2 - x^2}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$\int 2\pi dx \left[(a^2 - x^2)\left(\frac{a^2 - x^2 + x^2}{a^2 - x^2}\right)\right] = \int 2\pi\,dx\,(a^2 - x^2 + x^2)^{\frac{1}{2}} =$$

$\int 2\pi a\,dx = 2a\pi . x + C = 2a\pi . x$ = der Oberfläche eines der Zone umschriebenen Zylinders, indem für die Zone = 0 auch x und $C = 0$ werden.

Für $x = a$ wird die Oberfläche $M'AM = 2a^2\pi$ = der Oberfläche der Halbkugel; und $2a^2\pi . 2 - 4a^2\pi$ = der Oberfläche der Kugel, wie §. 189.

§. 289.

Aufgabe. Eine allgemeine Gleichung für den Kubikinhalt derjenigen Körper zu finden, welche durch die Umdrehung krummer Linien von senkrechten Ordinaten entstehen.

Auflösung. Es sey bey der krummen Linie AtM, die Gerade AP die Umdrehungsachse, $AP = x$, $PM = y$, und der Kubikinhalt des Körpers $MAM' = K$; so ist der abgekürzte Kegel zwischen den Ebenen MM' und $m'm$ das Differenziale von K. Diesen abgekürzten Kegel kann man als einen Zylinder ansehen, weil die Halbmesser der zwey Grundflächen nur um eine unendlich kleine Größe $qM = dy$ von einander verschieden sind. Es ist demnach dK ein Zylinder, dessen Grundfläche ein Kreis von dem Durchmesser MM', und dessen Höhe $= Pp = dx$ ist; es ist nämlich $dK = (PM)^2\pi . Pp = \pi y^2 dx$, folglich $K = \int \pi y^2\,dx + C$.... (A)

1) Es sey z. B. die Krumme AtM eine Parabel, so ist $y^2 = px$, also $K = \int \pi . px\,dx = \frac{1}{2}\pi p x^2$; wobey für $K = 0$ auch x und $C = 0$ sind: endlich ist $K = \frac{1}{2}\pi . px . x = \frac{1}{2}y^2\pi . x$ = dem halben Producte aus der Grundfläche in die Höhe, oder gleich der Hälfte des ihr umschriebenen Zylinders.

2) Gehört die Krumme AtM zu einem Kreise, so ist für den Halbmesser a, und die Abscissen vom Mittelpunct aus gerechnet, $y^2 = a^2 - x^2$ (§. 90. II.). Setzt man diesen Werth für y^2 in die obige Gleichung (A), so ist $K = \int \pi\,(a^2 - x^2)\,dx + C$ = dem Ku-

Fig. 148. bikinhalte einer halben Kugel. Da für $x = 0$ auch der Körper $= 0$ und also auch $C = 0$ wird; so ist $K = \int \pi (a^2 dx - x^2 dx) = \pi \left(a^2 x - \frac{x^3}{3}\right)$.

Für $x = a$ ist $K = \pi \left(a^3 - \frac{a^3}{3}\right) = \frac{2}{3} a^3 \pi$,

und $2K = \frac{4}{3} a^3 \pi =$ dem Inhalte der ganzen Kugel, wie im §. 212.

3) Gehört die Krumme AtM zu einer Ellipse, so ist $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$, vermög §. 273 in 2); daher

$K = \int \pi \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)\, dx = \int \pi \frac{b^2}{a^2}(a^2 dx - x^2 dx) = \pi \frac{b^2}{a^2}\left(a^2 x - \frac{x^3}{3}\right)$.

Für $x = a$ ist $K = \pi \frac{b^2}{a^2}\left(a^3 - \frac{a^3}{3}\right) = \pi \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{2}{3} a^3 = \frac{2}{3} a \cdot b^2 \pi$ = dem Kubikinhalte des halben Ellipsoid auf der großen Achse, wie §. 275. in 3).

§. 290.

149. Denkt man die Höhe AN eines Körpers, der sich in eine Spitze A endigt, in unendlich viele gleiche Theile getheilt, und durch die Theilungspuncte parallel Schnitte zur Grundfläche gelegt, so entstehen im Körper lauter Prismen von einer unendlich kleinen Höhe, und es ist ein solches Prisma das Differenziale des ganzen Körpers. Ist der Flächeninhalt eines solchen Schnittes $= g$, so ist der Kubikinhalt des Prisma $= g\,dx$; und der Inhalt des Körpers selbst, nämlich $K = \int g\, dx + C$ . . . . (A)

Der Inhalt eines solchen Körpers ist jedes Mahl bestimmbar, wenn g durch die Grundfläche des Körpers und durch x ausgedrückt werden kann.

1) Es sey in jeder Pyramide die Grundfläche $BCDE = G$, und ein paralleler Schnitt $bcde = g$, die Höhe $AN = h$, und $An = x$; so verhält sich

$G : g = h^2 : x^2$, vermög §. 166 in 3); und es ist

$g = \frac{G \cdot x^2}{h^2}$. Diesen Werth in die vorige Gleichung (A) für g gesetzt, ist $K = \int \frac{G \cdot x^2\, dx}{h^2} = \frac{G x^3}{3 h^2}$. Denn für $x = 0$ werden auch K und $C = 0$. Wird nun $x = h$, so ist $K = \frac{G h^3}{3 h^2} = G \cdot \frac{h}{3}$, wie §. 205.

150. 2) Es sey BCA eine Afterpyramide, deren Höhe $MA = h$, und ihre Grundfläche $BDCE = G$ ist, die ein Rechteck, Quadrat oder ein anderes regelmäßiges Vieleck seyn mag. Dieser Körper sey

also beschaffen, daß alle seine Seitenlinien aus Viertelkreisen bestehen, welche aus dem Mittelpuncte M mit dem Halbmesser $MA = MB = MD \ldots$ beschrieben sind. Fig. 150.

Setzen wir die Abscisse $Am = x$ und die Durchschnittsfläche $bdce = g$, so ist, vermög Eigenschaft des Kreises, der Halbmesser $mc = \sqrt{(2hx - x^2)}$; ferner verhält sich

$$G : g = MC^2 : mc^2$$

oder $G : g = h^2 : (2hx - x^2)$; daraus ist

$$g = \frac{G(2hx - x^2)}{h^2} = \frac{2Ghx - Gx^2}{h^2};$$

$$\text{und } K = \int\left(\frac{2Ghx}{h^2} - \frac{Gx^2}{h^2}\right) dx = \frac{2Gx\,dx}{h} - \frac{Gx^2\,dx}{h^2} =$$

$\frac{Gx^2}{h} - \frac{Gx^3}{3h^2}$, wenn man für g den Werth in die obige Gleichung (A) substituirt, wobey für $x = 0$ auch C und $K = 0$ werden. Setzt man $x = h$, so ist die ganze Afterpyramide $= \frac{2}{3} G . h = \frac{2}{3}$ des Productes der Grundfläche in die Höhe.

Sind die Seitenlinien AC, $AD \ldots.$ einer solchen Afterpyramide Parabeln, Ellipsen oder andere bekannte krumme Linien, so kann der Kubikinhalt auf eben dieselbe Weise berechnet werden.

3) Es seyen AB, $AD \ldots.$ Parabeln, und ihre Grundfläche $BDCE = G$ von der Beschaffenheit, wie oben vorausgesetzt, der Schnitt $bdce = g$, die Höhe $MA = h$ und die Abscisse $Am = x$,

so ist $G : g = BM^2 : bm^2$, vermög §. 148
und $Y^2 : y^2 = X : x$, vermög §. 270 in 5)
oder $BM^2 : bm^2 = AM : Am = h : x$, also auch

$G : g = h : x$ (Rk. 40. III.), daraus folgt

$g = \frac{G . x}{h}$. Diesen Werth oben in (A) für g substituirt, ist

$K = \int \frac{Gx\,dx}{h} + C = \frac{Gx^2}{2h}$, weil für $x = 0$ auch K und $C = 0$ sind. Geht x in h über, so ist

$K = \frac{Gh^2}{2h} = G . \frac{h}{2} =$ der Grundfläche multiplicirt mit der halben Höhe.

4) Es seyen AB, $AD \ldots.$ Bogen einer Ellipse, die Grundfläche $BDCE = G$ und von der oben vorausgesetzten Beschaffenheit, der Schnitt $bdce = g$, die Höhe $MA = a$ und $Am = x$; so verhält sich

Bayerische Staatsbibliothek München

Fig. 150.
$G : g = BM^2 : bm^2$, vermög §. 148.
und $Y^2 : y^2 = X(2a - X) : x(2a - x)$, vermög §. 272. 3)

daher $G : g = X(2a - X) : x(2a - x)$, weil $BM = Y$ und $bm = y$ ist, daraus folgt

$$g = \frac{2Gax - Gx^2}{X(2a - X)};$$ substituirt man diesen Werth für g oben in (A), so wird

$$K = \int \left[\frac{2Gax - Gx^2}{X(2a - X)} \right] dx = \int \left[\frac{2Gax\,dx - Gx^2\,dx}{X(2a - X)} \right] =$$

$$\left(Gax^2 - \frac{Gx^3}{3}\right) : X(2a - X),$$ weil für $x = 0$ auch K und $C = 0$ sind. Setzt man für $x = X = a$, so wird $K = (3Ga^3 - 3Ga^3) : (6a^2 - 3a^2) = \frac{2}{3} G \,.\, a = \frac{2}{3}$ vom Producte der Grundfläche in die Höhe.

Dem Buchbinder zur Nachricht:

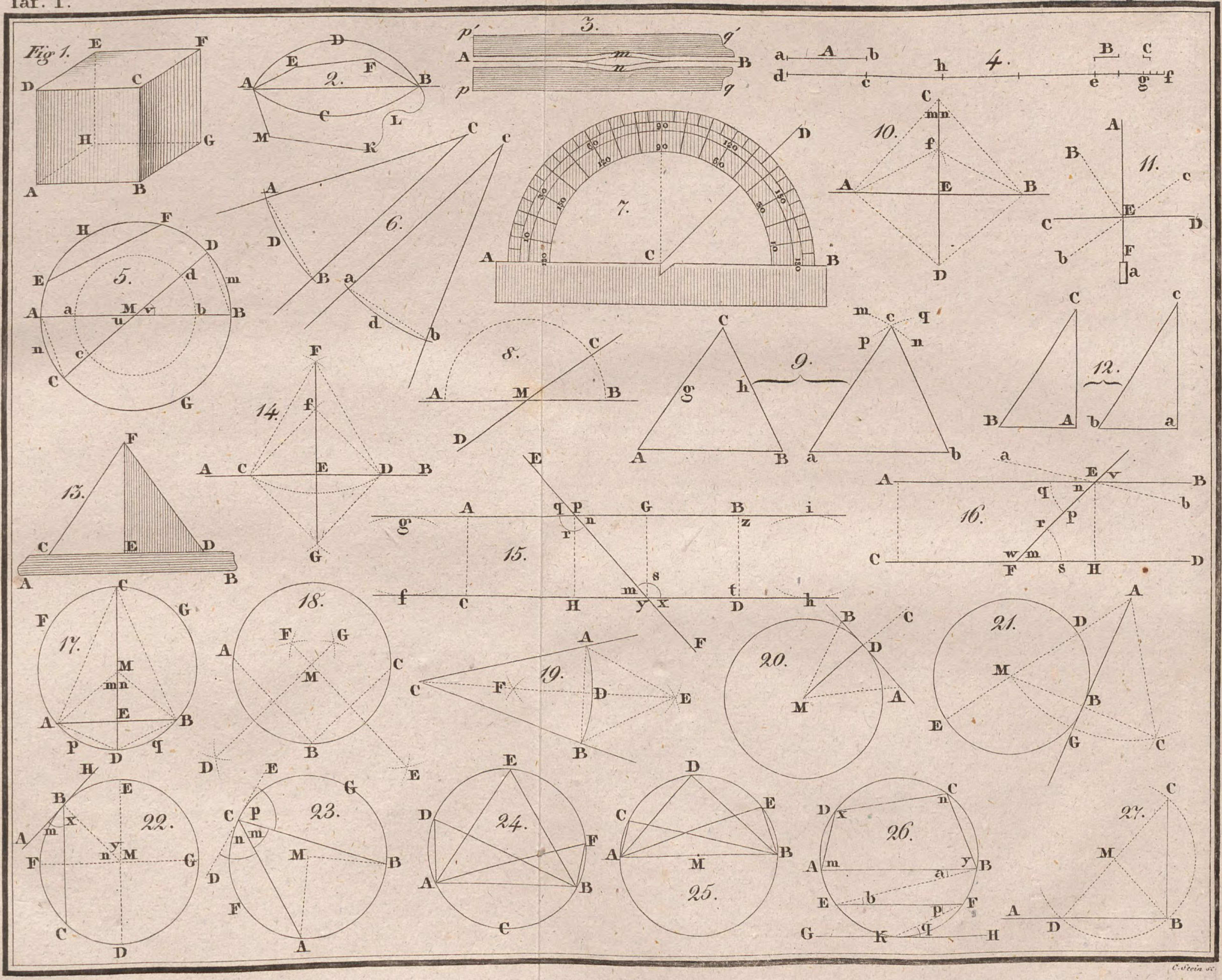
Die im Titelbogen enthaltenen zwey Blätter sind gehörigen Ortes einzuschalten, die dadurch entbehrlichen aber auszuschneiden.

Die Kupfertafeln sind ganz zum Herausschlagen einzubinden, wozu das nöthige Papier an jeder Tafel schon vorhanden ist.

Bayerische Staatsbibliothek München

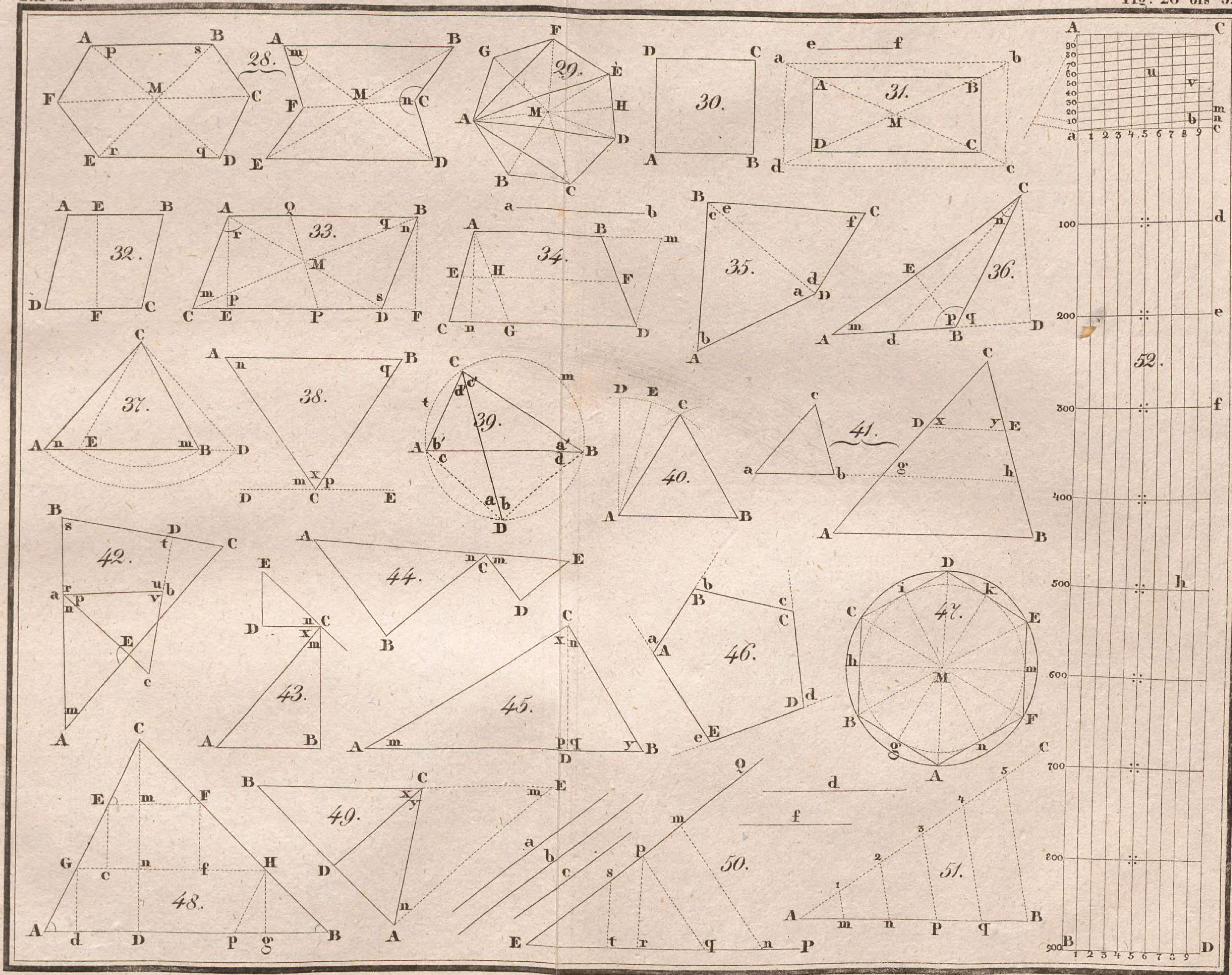
Taf. 1.

Fig. 1 bis 27.

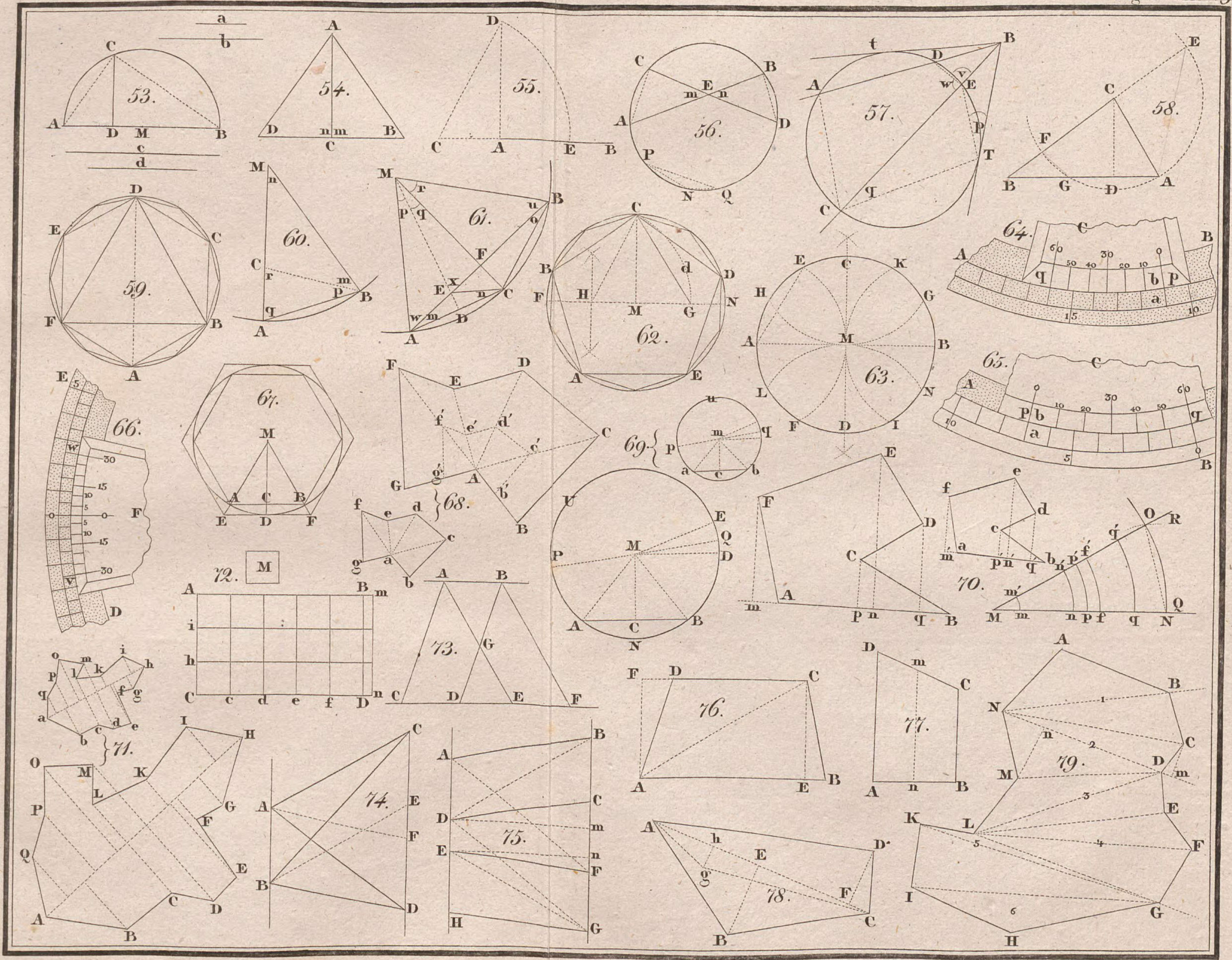


C. Stein sc.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

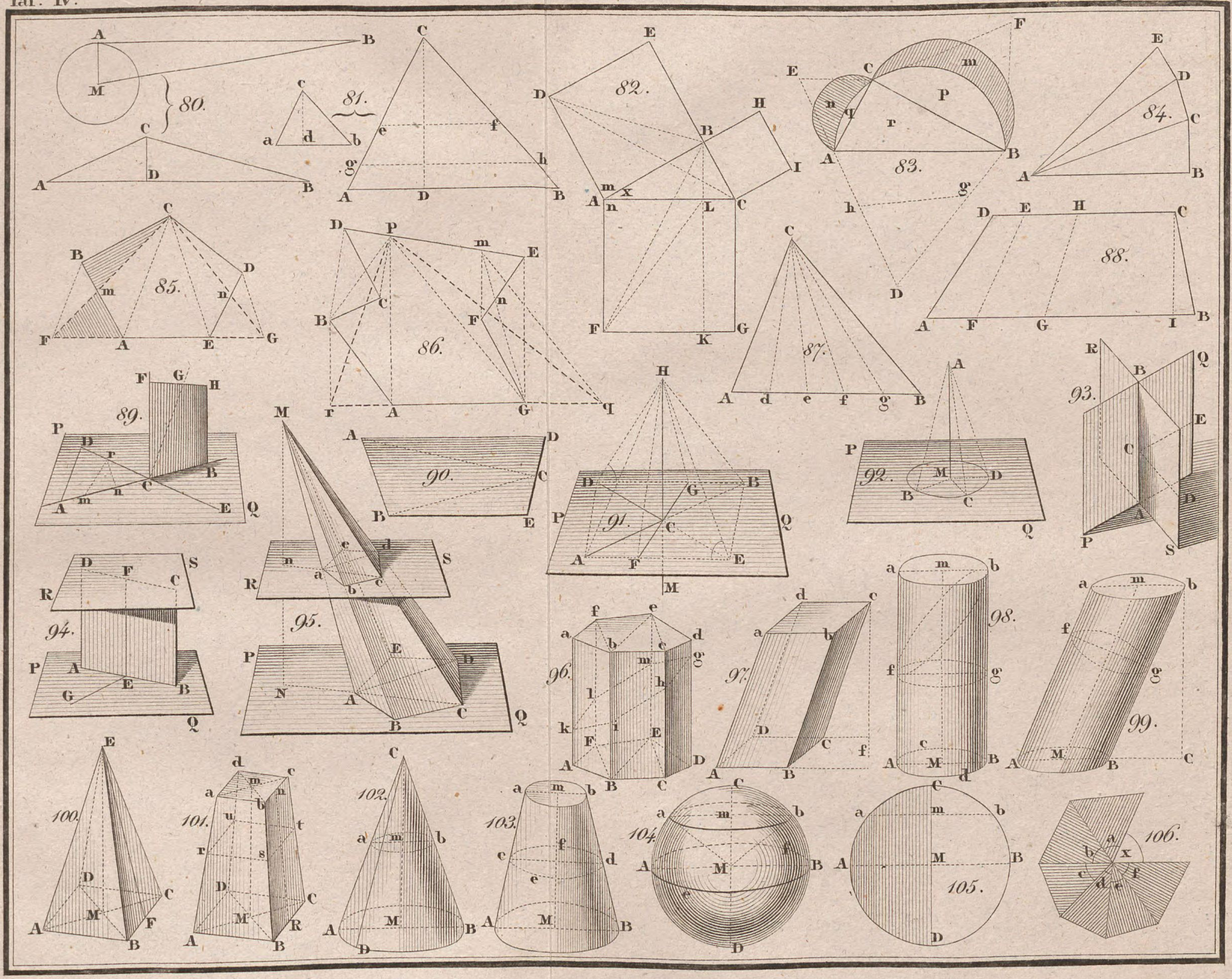


Bayerische Staatsbibliothek München

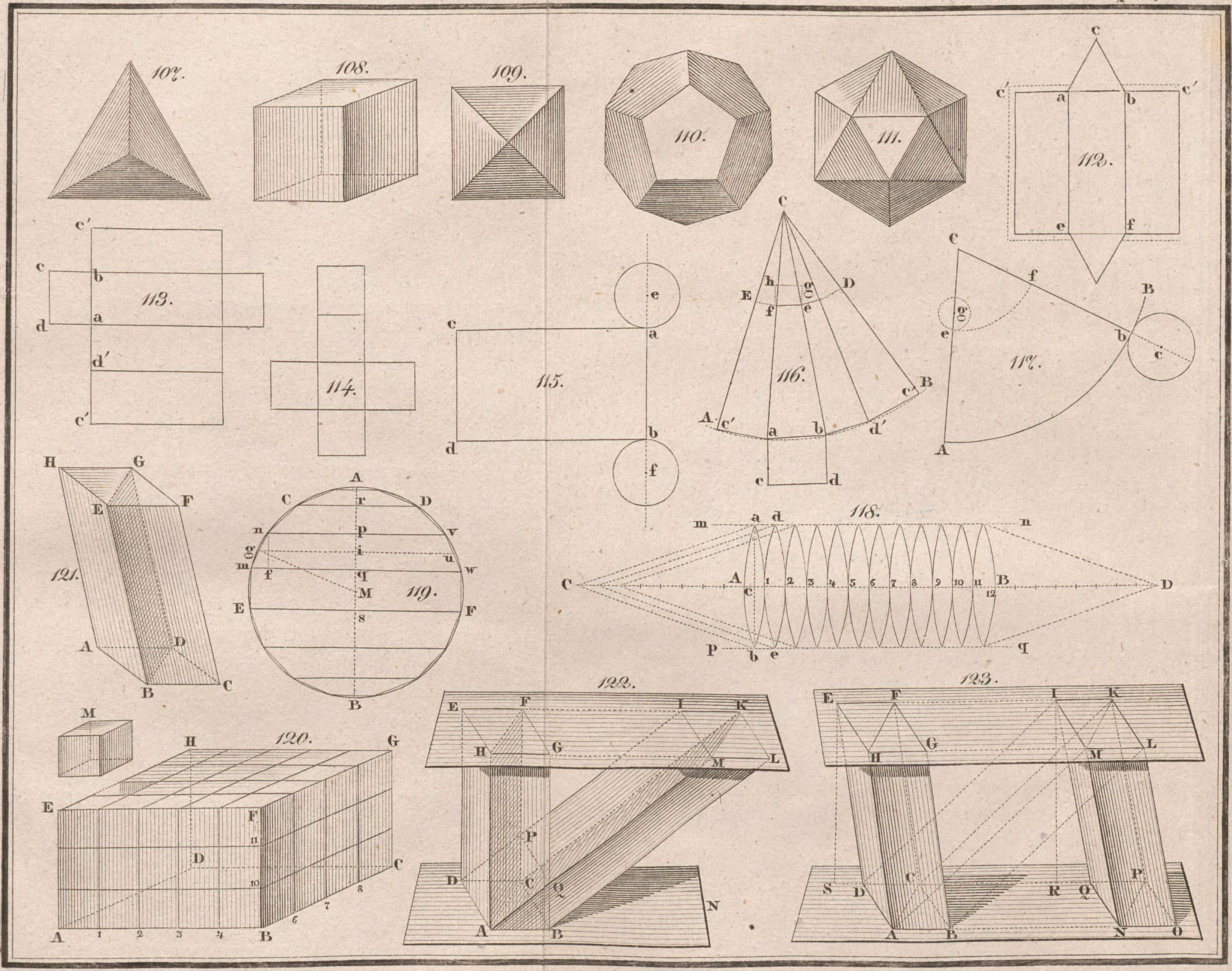


Bayerische
Staatsbibliothek
München

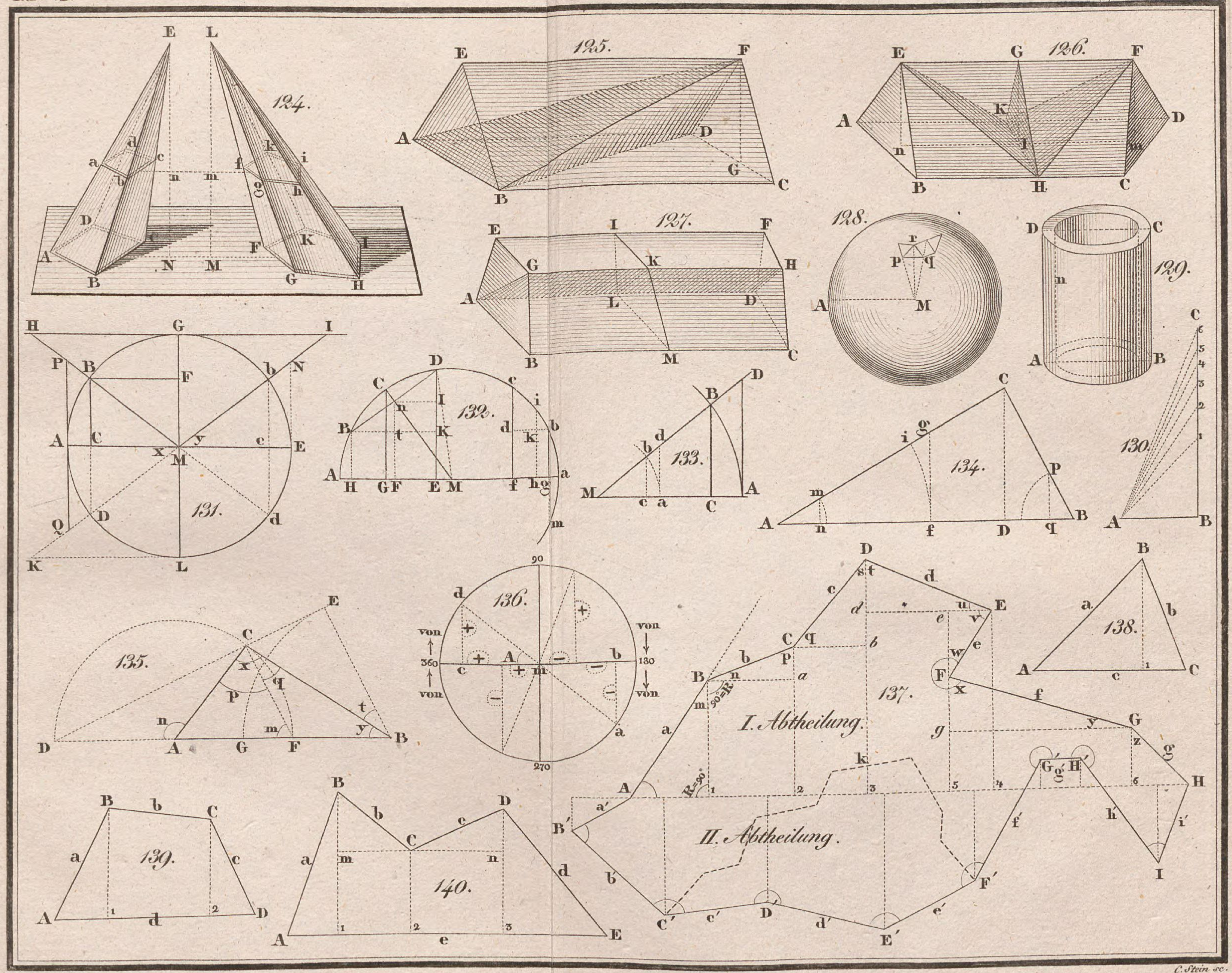
Taf. IV. Fig: 80 bis 106.



Bayerische
Staatsbibliothek
München

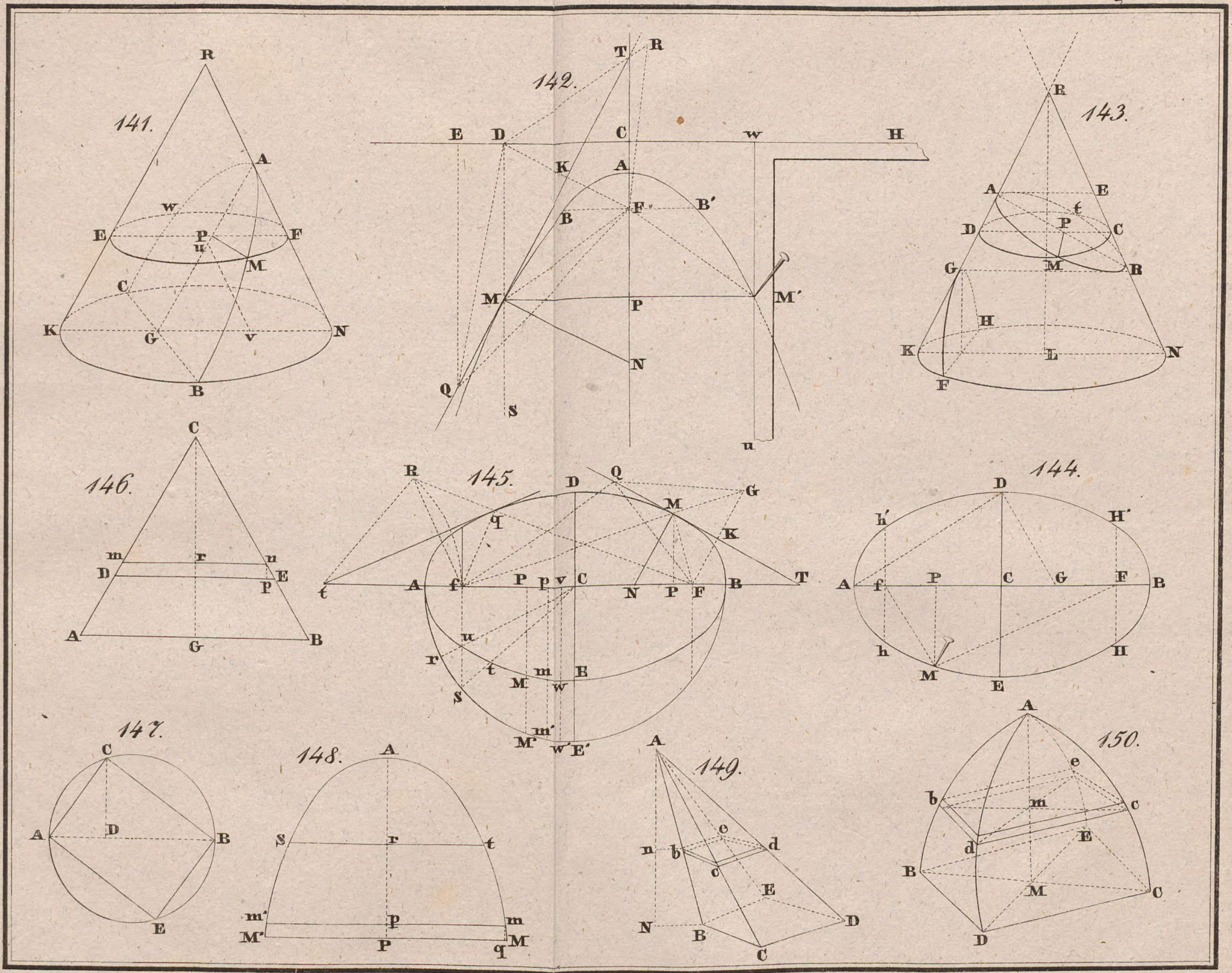


Bayerische Staatsbibliothek München



C. Stein sc.

Bayerische Staatsbibliothek München



Bayerische Staatsbibliothek München

Bayerische StaatsBibliothek

Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Winkler von Brückenbrandt, Georg Johann,

Lehrbuch der Geometrie Zum öffentlichen Gebrauche f. Individuen, d. sich d. Forstfache, d. Meß- u. Baukunst widmen, so wie zum Selbstunterrichte f. jeden Liebhaber dieser Wiss. ; Enth. d. theoretische, d. geradlinige Trigonometrie u. Polygonometrie, nebst d. Anfangsgründen d. Differenzial-

Wien 1839

Math.p. 741 x
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10083317-1